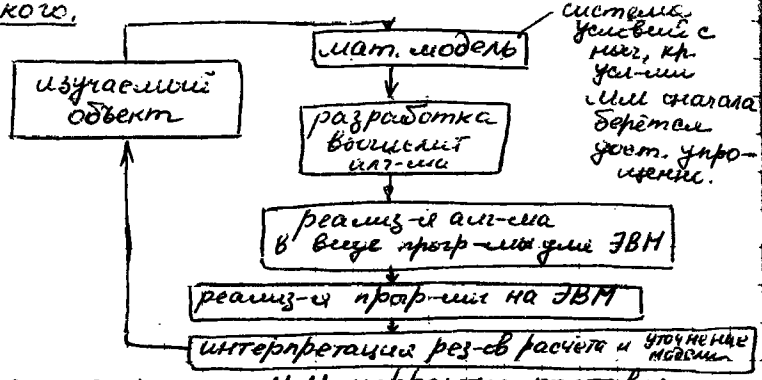
10.02.04 **Численные методы.**

Лекция 1

Ионкин Николай Иванович
каф. выч. методов

Экзамен
3–4 переписи ⇒ конст. польз. можно

Реал. задача прох. опред-е этапы — колесо Самарского.



Будем считать, что ММ корректно поставлена (т.е. реше ∃ и непр. зав. от нач. у.)

Разноб. выч. мат. — предмет нашего курса

Главы курса:

1. ЧМ лин. алгебры (3)
2. Интерполирование и приближение функций
3. Решение нелинейных ур-ий и систем нелинейных ур-ий
4. Разностные схемы для уравнений математической физики
5. Решение задачи Коши для ОДУ и систем ОДУ

Литература

1. Самарский А.А., Гулин А.В.
„Численные методы", М. Наука, 1989г

2. Самарский А.А.
„Введение в ЧМ", М. Наука, 1982г

3. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.
„Численные методы", М. Наука, 1987г

4. Халиткин Н.Н.
„Численные методы", М. Наука, 1978г

5. Самарский А.А.
„Теория разностных схем", М. Наука 1983г

6. Самарский А.А., Николаев Е.С.
„Методы решения сеточных уравнений", М. Наука, 1978г

Автор: Валентина Глазкова
Скан: Валентина Глазкова
Обработка: Валентин Вербовой

Глава I. Численные методы лин. алгебры.

§1. Введение.

(1) Сист. ЛАУ $Ax = f$
Мы рассм. корр. пост.-е задачи (т.е. реш-е единств.),
т.е. A – невырождена $\det A = |A| \neq 0$

$\exists A^{-1}$ имеет р-р $(n \times m)$
$x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$, $f = (f_1, f_2, \dots f_m)^T$

Часто м-ца A имеет спец. стр-ру (сод-т много нулей),
Поэтому „в общ" решать неэффр.

При реш-ии сист. (1) исп-ся <u>2 группы методов</u>:

1. прямые (точные)
2. итерационные (приближённые)

Когда мы говорим <u>точные</u>, мы абстрагир-ся от ошибок округл-я ЭВМ.
Эти методы позволяют за конеч. число опер. найти реше.
<u>Прямые методы:</u>

- Гаусса
- квадр. корня
- ф-лы Крамера

<u>Ф-лы Крамера.</u>
Связаны с вычислением опред.
Сл-но, надо вып-ть порядка $\sim n!$ действий.
В выч. матем-ке ф-лы Кр. не исп-ся.

<u>Метод Гаусса.</u>

Число действий пропорц. n^3
При больших (n) мет. Г. гораздо экономичнее ф-л Кр.
Этот мет. акт. прим-ся в вычисл. мат-ке (особенно если м-ца полная).
Для спец. видов м-ц исп-ся частн. случаи (ex. мет. прогонки).

<u>Эффр-ть методов</u> (прямых) сравнив-ся по числу действий:

- умнож-я и
- деления.

<u>Итерационные методы</u>

Для реш-я более слож. задач ит. мет. м.б. гораздо эфф. прямых.

Мы выбираем в кач-ве нач. приближения некот. вектор x^0 так, чтобы процесс сходился.
Далее строим вычислит. процесс $\{x^n\}$, такой что

$$\lim_{n \to \infty} x^n = x$$

Близость оцениваем по некот-ой норме
$\varepsilon > 0$ $\|x^n - x\| < \varepsilon$
При этом сходимость в одной норме не гарантирует сх-ть в другой норме.
Поэт. говоря о сх-ти надо указ. опред-ю норму.

Как выяснить, когда обрывать итер. проц?
$n_0(\varepsilon)$ – число итераций, необх-х для достиж-я зад. точности ε.

Теор-ть итер методов будем оценивать именно по этой величине ($n_0(\varepsilon)$ рассчит-ся теор-ки).

Также в этой главе будем искать пробл. соб. зн-ий.
Для м-цы A ищем с.з.:
$Ax = \lambda x$, $x \neq 0$
λ – соб.зн., x – соб. вектор.

С.з очень важны (от них зависит и усл-ть, и сх-ть)

Различают 2 проблемы:
1° частичн. пробл. с.з. (заключ-ся в нах-ии min и max по мод. с.з.)
2° полная пробл. с.з. (нах-е всех с.зн.)

Полная пробл. гораздо более сложная, чем частичная.
Все эти пробл. реш-ся итерац-ми методами.

Мы также решим в этой гл. пробл. нах-я обратной м-цы для невырожд-ой м-цы. (за m^3 действий).

§2. Связь метода Гаусса с разложением матрицы на множители.

Рассм-ем СЛАУ $Ax = f$ (1)
с невырожд м-цей A ($\det A \neq 0$) порядка A ($m \times m$).

Ранее выводилось, что метод Гаус. требует $\sim \frac{m^3}{3}$ действий.
в МГ
Оказ-ся удобно сначала расклад-ть м-цу A на множители спец. вида (факторизация м-цы A):
$$A = BC, \quad (2)$$
где $B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mm} \end{pmatrix}$ – ниж. треуг. м-ца

$C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1m} \\ 0 & 1 & c_{23} & \dots & c_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ – верхн. треуг. м-ца с 1 на главн. диагонали

Ставим вопрос?
• можно ли м-цу A в таком виде представить (и любую ли).

Получим ф-лы, кот. позволяют нах-ть эл-ты м-ц B и C.
Эл-ты м-цы A имеют вид:
$$a_{ij} = \sum_{l=1}^{m} b_{il} c_{lj}$$
$$a_{ij} = \sum_{l=1}^{l=i-1} b_{il} c_{lj} + b_{ii} c_{ij} + \underbrace{\sum_{l=i+1}^{m} b_{il} c_{lj}}_{=0}$$
$b_{il} = 0$, если $l > i$ (м ниж вида) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$

$$b_{ii}c_{ij} = a_{ij} - \sum_{l=1}^{i-1} b_{il}c_{lj}$$

Будем считать, что $b_{ii} \neq 0$

$$\Rightarrow \boxed{c_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{l=1}^{i-1} b_{il}c_{lj}}{b_{ii}}}, \quad i<j \qquad (3)$$

Учтём, что C – верхн. треуг-я $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ распишем Σ по другому

$$a_{ij} = \sum_{l=1}^{j-1} b_{il}c_{lj} + b_{ij}\underbrace{c_{jj}}_{1} + \sum_{l=j+1}^{m} b_{il}\underbrace{c_{lj}}_{=0 \text{ (т.к } c_{ij}=0,\ l>j)}$$

$$\Rightarrow \boxed{b_{ij} = a_{ij} - \sum_{l=1}^{j-1} b_{il}c_{lj}, \quad i \geq j} \qquad (4)$$

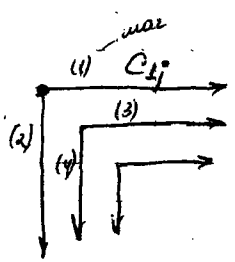
Распишем из (3):

$1 = c_{11} = \frac{a_{11}}{b_{11}}$, $c_{1j} = \frac{a_{1j}}{b_{11}}$ $\forall j = \overline{2,m}$, т.е. c_{1j} можем найти

Из флы (4) найдём

$b_{j1} = a_{j1}$

$b_{22} =$



Лекция 2

11.02. (2)

Нам надо научиться факторизовать $A = BC$ для реш-я сист. лин. алг. ур-ний методом Гаусса.

Это удобно, когда мы решаем много систем с неизменными матрицами и меняющимися правыми частями.

СЛАУ $Ax = f$ (1)

$\det A \neq 0$

Число действий (умн-я и деления) в методе Гаусса.

В рез-те прямого хода мет. Гаусса получаем м-цу

$$\begin{pmatrix} 1 & & \tilde{a}_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \vdots \\ \tilde{f}_m \end{pmatrix}$$

Число действий, необх. для выч-я этого, $\frac{m^3 - m}{3}$ (для преобр-я м-цы A)

$\frac{m(m+1)}{2}$ (число действ., необх. для преобр-я правых частей)

Обратных ход мет. (нах-е $x_1, \dots, x_m$) требует

$\frac{m(m-1)}{2}$ действий

Выясним, какие системы можно факторизовать?
(надо было, чтобы все $b_{ii} \neq 0$)

Вычислим все угловые миноры матрицы A:

$$A_1 = a_{11}; \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \dots$$

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}; \quad k = \overline{1,m}$$

Утв. Пусть все главные угловые миноры системы A отличны от 0 (т.е. $|A_i| \neq 0$, $i = \overline{1,m}$)
$\Rightarrow$ факторизация системы $A = BC$ возможна единств. образом.

Док-во Заметим
$$|A_i| = |B_i||C_i| = \underbrace{b_{11}}_{1} \cdot b_{22} \dots b_{i-1,i-1} b_{ii}$$
$$\Rightarrow b_{ii} = \frac{|A_i|}{|A_{i-1}|}, \quad i = \overline{1,m} \Rightarrow \text{все } b_{ii} \neq 0$$
$\Rightarrow$ факт-я возм. (!) образом.

Мы указали достаточное усл-е (если эти усл-я нарушены, это не значит, что разл-е (!) обр. невозможно)

• Теперь свяжем факторизацию с методом Гаусса.

$$A = BC \quad (2)$$
Применим факторизацию для реш-я сист.
$$Ax = f \quad (1)$$
Подставим (2) в (1): $BCx = f$
Обозначим $Cx = Y$
$$\Rightarrow \begin{cases} BY = f & (5) \\ Cx = Y & (6) \end{cases}$$

Т.о., мы свели исходную сист. к реш-ю двух систем с верхн. и нижн. Δ матрицей.

Это другой удобный подход к реш-ю систем.

из (5) $\Rightarrow$
$$\Rightarrow Y = B^{-1} f$$

Оценим число действий

Задача Показать, что для вычисления по ф-лам (3), (4) треб-ся $\frac{m^3 - m}{3}$ действий.

Распишем систему (5)-(6) покоординатно

(5) $\Rightarrow$ $b_{11} y_1 + b_{12} y_2 + \dots + b_{ii} y_i = f_i$, $i = \overline{1,m}$ (i-ое ур-е)

Считаем, что $b_{ii} \neq 0$ (если все угл. миноры $\neq 0$, то это выполнено)

$$\Rightarrow \boxed{y_i = \frac{f_i - \sum_{l=1}^{i-1} b_{il} y_l}{b_{ii}}} \quad (7)$$

Запишем покоорд-но сист (4)

(8') $x_i + c_{i,i+1}x_{i+1} + \dots + c_{im}x_m = y_i$ (i-ое ур-е)

(8) $$x_i = y_i - \sum_{l=i+1}^{m} c_{il}x_l, \quad i = m, m-1, \dots, 1$$

Рассм. сколько умн-ий и дел. в ф-ле (7).

Фиксируем i

надо $(i-1)$ умн-е + 1 деление $= i$ действий

i сил-ся от 1 до m

Число действ. для решения системы (5)

$$1+2+\dots+m = \frac{m(m+1)}{2}$$

это равно числу действ. для обр-я пр. частей в прямом ходе МГ

Ф-ла (8)

фиксируем i $\Rightarrow$ $(m-i)$ действий

Всего $1+2+\dots+m-1 = \frac{m(m-1)}{2}$ (действий)

это равно числу действ обр. хода МГ

$\Rightarrow$ Большая часть действий уходит на ортогонализацию

В совок-ти для реш-я системы (5)–(6) надо m^2 действий

при больших (m) это значит $<$, чем $\frac{m^3-m}{3}$ действий

§3. Обращение матрицы методом Гаусса–Жордана.

Пусть задана м-ца $A(m\times m)$, кот невырождена ($\det A \neq 0$).

В этом случае для обр-ой к A м-це вып-ся св-во

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E$$

Из алг-ма мы знаем структуру обратной м-ы.

Метод алг-х дополнений треб-ет $m!$ действий

$\Rightarrow$ при больших (m) не годится

Обозначим $A^{-1} = X$

$\Rightarrow$ получим матричное уравнение

$$AX = E \qquad (1)$$

имеет m^2 неизвестных.

МГ требует пропорц. $\frac{m^3}{3}$ действий

$\Rightarrow$ если в лоб решать сист (1) надо $\sim m^6$ действий

При $m = 10^{6-7}$ это нереально.

Для реал. задач надо уметь обращать большие матр.

На этой лекции мы обратим матрицу за m^3 действий (это для 3 порядка <!)

Метод Гаусса-Жорд. заключ-ся в обращении сист. (1) к (m) системам с (m) неизвестными (за m^2 неизв)

вв. $x^{(j)} = \{x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{mj}\}^T$

$\delta^{(j)} = \{0, 0, 0, \dots, 0, \underset{(j)}{1}, 0, \dots, 0\}^T$

$\Rightarrow$ каждую сист. можно записать так

$$(2) \quad \underbrace{Ax^{(j)} = \delta^{(j)}}, \quad j = \overline{1,m}$$

получили (m) систем с одной и той же матр. A и разными прав. частями

Посчитаем число действий, необх. для реш-я (m) систем вида (2).

Представим $A = BC \Rightarrow$ {подст. в (2)}

$\Rightarrow BC x^{(j)} = \delta^{(j)}$

обозн. $y^{(j)} \Rightarrow$ получим систему

$$(3) \quad By^{(j)} = \delta^{(j)}$$
$$(4) \quad Cx^{(j)} = y^{(j)}, \quad j = \overline{1,m}$$

Факторизовать надо только (1) раз (это хорошо).

На неё надо $\frac{m^3 - m}{3}$ действий.

При фикс. j (3)+(4) требует m^2 действий (выведем в §2)

Т.о., для решения (m) систем нам надо всего

$$\frac{m^3 - m}{3} + m^3 \sim \frac{4}{3} m^3 \text{ действий}$$

Это и есть метод Гаусса-Жордана

Покажем теперь, что если решать эти сист. продуманно, то можно решить за m^3 действий

За счёт чего можно сэкономить?

Экономить на фактически нулях, можно экономить при реш-ии (3)-(4)

Ненулевая компонента в (j)-ой позиции $\Rightarrow$ предыдущие комп-ты можно не считать.

(с 1-ой по (j-1)-ую комп-ты вектора $y^{(j)}$ нулевые)

Покажем это.

$$(3) \Rightarrow b_{11} y_1^{(j)} = 0 \Rightarrow y_1^{(j)} = 0$$
$$b_{21} y_1^{(j)} + b_{22} y_2^{(j)} = 0 \Rightarrow y_2^{(j)} = 0$$
$$\dots$$
$$b_{j-1,1} y_1^{(j)} + b_{j-1,2} y_2^{(j)} + \dots + b_{j-1,j-1} y_{j-1}^{(j)} = 0 \Rightarrow$$

Следов, все $y_i^{(j)} = 0 \quad i < j$

Это позволяет не считать в программе эти коэф-ты

(j-ое) ур-е имеет вид

(*) $b_{jj} y_j^{(j)} = 1 \Rightarrow \boxed{y_j^{(j)} = \frac{1}{b_{jj}}} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ все последующие коэффициенты с $i > j$ нулевыми не будут

Вычтем все последующие ур-ия (3), начиная с (j+1)

(i-ое ур-е) $b_{ij} y_j^{(j)} + b_{i,j+1} y_{j+1}^{(j)} + \dots + b_{ii} y_i^{(j)} = 0, \quad i > j$

(считаем $b_{ii} \neq 0$)

(5) $\Rightarrow \boxed{y_i^{(j)} = \frac{\sum_{e=j}^{i-1} b_{ie} y_e^{(j)}}{b_{ii}}, \quad i = \overline{j+1, m}}$

Посчитаем число действ. необход-ое для реализации ф-лы (5), ~~~ i и j фиксируем

Умножений $(i-j) + 1$ деление $= (i-j+1)$ действий

„Отпустим" (i) /* $i = \overline{j+1, m}$ */

Число умножений:

$(m-j) + (m-1-j) + \dots + 1 = \frac{(1+m-j)(m-j)}{2}$

Число делений: 1-о в ф-ле (*) и еще $(m-j)$ в ф-ле (5) $\forall$ т.е. $(m-j+1)$ делений

Т.о., для реализации ф-лы (5) $\forall$ и (*) $\forall$ при фикс. (j) надо

$$\frac{2(m-j+1) + (m-j+1)(m-j)}{2} = \frac{(m-j+1)(m-j+2)}{2}$$ действий (умн. и дел-ий)

„Отпускаем" индекс (j)

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{(m-j+1)(m-j+2)}{2} \quad (=)$$

$\sum_{j=1}^{m} j = \frac{m(m+1)}{2}$

$\sum_{j=1}^{m} j^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$

Задача Показать, что это число действий $(=) \frac{m(m+1)(m+2)}{6}$

С ф-лой (3) разобрались полностью, а в (4) ничего экономить нельзя

(для нее надо $\frac{m(m-1)}{2}$ действ. при фикс (i)

$\Rightarrow$ всего $\frac{m^2(m-1)}{2}$ действий)

Т.о. $\underbrace{\frac{m(m+1)(m+2)}{6}}_{\text{для реализации (4)}} + \underbrace{\frac{m^2(m-1)}{2}}_{\text{для (3)}} + \underbrace{\frac{m^3-m}{3}}_{\text{факторизация}} =$

$= \frac{m(m+1)(m+2)}{6} + \frac{3m^2(m-1)}{6} + \frac{2(m^3-m)}{6} =$

$= \frac{m}{6}\left((m+1)(m+2) + 3m(m-1) + 2m^2 - 2\right) =$

$= \frac{m}{6}\left(m^2 + 3m + 2 + 3m^2 - 3m + 2m^2 - 2\right) = (m^3)$ действий!

Это зоркективный сметод. (когда м-ца треугольная)

§4. Метод квадратного корня.

Задача: решаем систему

(1) $Ax = f$

с невырожд. м-цей $A(m\times m)$ (т.е. $|A|\neq 0$)

Рассм. эрмитову (самосопряж.) м-цу

$A = A^*$

В ней $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$

Метод кв. корня годится только для систем с эрмитовой матрицей (в реал. задачах они встреч. очень часто).

МКК зак. в след-м.

Поставим зад.: факторизовать м-цу A в виде 3-х ом

(2) $A = S^* D S$,

где S – верхн. Δ м-ца $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1m} \\ 0 & s_{22} & \cdots & s_{2m} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & s_{mm} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow S^*$ – нижн. Δ м-ца (как сопряж-я)

$s_{ii} > 0$, $i = \overline{1,m}$

/* если оператор самосопр. и полож. определ., то у него на гл. диаг. полож. числа – утв-е из лин. алг. */

$D = \begin{pmatrix} d_{11} & & 0 \\ & d_{12} & \\ 0 & & d_{mm} \end{pmatrix}$, $d_{ii} = \pm 1$ – диаг. м-ца

Чтобы понять смысл МКК, рассм. м-цу A с вещественн. эл-ми 2-го порядка

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

S ищем в виде $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ 0 & s_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow S^* = \begin{pmatrix} s_{11} & 0 \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix}$

D – диаг с ± 1 на гл. диаг.

Найдем $DS = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ 0 & s_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11}s_{11} & d_{11}s_{12} \\ 0 & d_{22}s_{22} \end{pmatrix}$

Теперь ещё слева умножаем на S^*:

$S^*DS = \begin{pmatrix} s_{11} & 0 \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_{11}s_{11} & d_{11}s_{12} \\ 0 & d_{22}s_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11}s_{11}^2 & s_{11}d_{11}s_{12} \\ s_{12}d_{11}s_{11} & s_{12}^2 d_{11} + d_{22}s_{22}^2 \end{pmatrix}$

Приравняем это к $A = S^*DS$ (они совпадают поэлементно)

$$\begin{aligned} a_{11} &= d_{11}s_{11}^2 \\ a_{12} &= s_{11}d_{11}s_{12} \\ a_{22} &= s_{12}^2 d_{11} + d_{22}s_{22}^2 \end{aligned}$$ – нелинейная система

Из 1-го ур-ия $\Rightarrow$ $d_{11} = \operatorname{sign} a_{11}$

В предпол-ии $a_{11} \neq 0$ $\Rightarrow$ $s_{11} = \sqrt{|a_{11}|}$

Из 2-го ур. мах s_{12} $\Rightarrow$ $s_{12} = \dfrac{a_{12}}{s_{11}d_{11}}$

Из 3-го ур-ия $\Rightarrow$ $s_{22}^2 d_{22} = a_{22} - s_{12}^2 d_{11} \Rightarrow$

$\Rightarrow d_{22} = \operatorname{sign}(a_{22} - s_{12}^2 d_{11})$

В предп-ии $a_{22} \neq 0$ $\Rightarrow$ $s_{22} = \sqrt{|a_{22} - s_{12}^2 d_{11}|}$

Все эл-ты однозн. найдены $\Rightarrow$ наше $A = S^*DS$ верно (!) обратно.

Лекция 3
17.02.

Общий случай.

Факторизовать матрицу A в виде 3-х матриц:

(2) $A = S^* D S$,

$A = A^*$ $(a_{ij} = \overline{a_{ji}})$ – эрмитова

Найдём эл-ты произв. DS:

$(DS)_{ij} = \sum_{l=1}^{m} d_{il} S_{lj} = d_{ii} S_{ij}$ – верхнетреуг. матрица

Домножим слева на S^* с элементами $\overline{S}_{ji}$:

$(S^* DS)_{ij} = \sum_{l=1}^{m} \overline{S}_{li} d_{ll} S_{lj} = a_{ij}$; $i,j = \overline{1,m}$

Из этого соотн-я найдём эл-ты матриц S и D.

Распишем эту Σ, разбив на 3 слагаемых:

$$\sum_{l=1}^{m} \overline{S}_{li} d_{ll} S_{lj} = \sum_{l=1}^{i-1} \overline{S}_{li} d_{ll} S_{lj} + \overline{S}_{ii} d_{ii} S_{ij} + \underbrace{\sum_{l=i+1}^{m} \overline{S}_{li} d_{ll} S_{lj}}_{=0} = a_{ij}$$

Учтём, что $\overline{S}_{li} = 0$, $l > i$ (т.к. она Δ-я) $\Rightarrow$

Перепишем ур-е:

(3) $\overline{S}_{ii} S_{ij} d_{ii} + \sum_{l=1}^{i-1} \overline{S}_{li} d_{ll} S_{lj} = a_{ij}$, $i \le j$

Рассм. отдельно это ур-е при $i = j$ (зам., что $S \cdot \overline{S} = |S|^2$)

$|S_{ii}|^2 d_{ii} + \sum_{l=1}^{i-1} |S_{li}|^2 d_{ll} = a_{ii}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow |S_{ii}|^2 d_{ii} = a_{ii} - \sum_{l=1}^{i-1} |S_{li}|^2 d_{ll}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{d_{ii} = \operatorname{sign}\left(a_{ii} - \sum_{l=1}^{i-1} |S_{li}|^2 d_{ll}\right)} \quad \forall i \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{S_{ii} = \sqrt{\left|a_{ii} - \sum_{l=1}^{i-1} |S_{li}|^2 d_{ll}\right|}} \quad i = \overline{1,m}$

Из (3) $\Rightarrow \boxed{S_{ij} = \left(a_{ij} - \sum_{l=1}^{i-1} \overline{S}_{li} d_{ll} S_{lj}\right) / \overline{S}_{ii} d_{ii}}$

Т.о., возможна факторизация эрмитовой матр. в виде (2), если угловые миноры $\neq 0$.

Зачем что мы это делали?

Зачем реш-ие системы $Ax = f$ (эф-ю) (1)

$\Rightarrow S^* \underbrace{DSx}_{\text{обозн. } y} = f \Rightarrow$ ур-е расп-ся на два

$$\begin{cases} S^* y = f & (4) \\ DSx = y & (5) \end{cases}$$

Из (4) $\Rightarrow$ найдём y по явным ф-ам, т.к. S^* – нижне треуг.

Из (5) $\Rightarrow$ найдём x по явн. ф-ам, т.к. DS – верхне Δ

В чём выигрыш?

- по ф-ле (3) нам надо считать половину эл-ов, а не все $\Rightarrow$
  $\Rightarrow$ число умн-ий и делений по порядку $\sim \frac{m^3}{6}$ + m извлечений корня $\Rightarrow$
  $\Rightarrow$ суммарное число действий меньше (не на порядки, но $\approx$ в 2 раза) – это уже важно
- когда этот метод разработали, существовали быстрые с точки зрения расхода ОП.

Прямые методы:
- слг $\sim \frac{m^3}{3}$ слож-ть
- спец. кв. корня (для эрмитовых матриц)

§5. Итерационные методы. Примеры и канонический вид итерац. методов реш-я СЛАУ.

Зачем нужны итер. мет., если есть дост. эфф. прям. мет, дающие точное решение?

В реал. задачах информация в системе задана не точно, а с определ-ой точностью из каких-то наблюд.
Тогда мы можем найти реш-е с той же заданной точностью, но быстрее, чем с помощью прямых методов.
Итерац. мет. разраб-ся давно.
Эта обл-ть выч. математики сейчас бурно развив-ся.

Постан. задачи:
есть СЛАУ

(1) $Ax = f$

с невыр. матрицей $A\ (m \times m)$: $\det A \neq 0$,

$x = (x_1, \dots, x_m)^T$, $f = (f_1, \dots, f_m)^T$

обозн. x_i^n – i-ая коорд. n-ой итерации (нач. ит. – вверху, индекс – внизу).

Суть: мы зараёем нач. приближ-е X^0 вектора, явл-ся решением (если процесс сход. раах-ся, то надо выбир. X^0 так, чтобы процесс сх-ся)
Далее начинаем вычислять X^n, $n = 1, 2, \dots$
Если $x^n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$ – точное реш-е, то итерац. процесс наз-ся сходящимся.

Надо понимать в какой норме рассм-ся сх-ть (мем. на то, что все нормы в конечномерн. пр-ве эквивал-ны).
↳ Сх-ть в одной норме не гарантирует сх-ть в другой норме.

Запишем сист. $Ax = f$ покоординатно – выпишем (i-ое) ур-е:

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = f_i, \quad i = \overline{1,m} \qquad (2)$$

$\Rightarrow$ разб. на 3 слаг-х:

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j + a_{ii} x_i + \sum_{j=i+1}^{m} a_{ij} x_j = f_i$$

если $a_{ii} \neq 0$, то $x_i = \frac{f_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j - \sum_{j=i+1}^{m} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j$ (3)

Примеры итерац-х методов.

Теперь можем "навешивать" итерацию на i-ю коорд.

① Метод Якоби

$$x_i^{n+1} = \frac{f_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^n - \sum_{j=i+1}^{m} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

x^0 – задано, $i = \overline{1,m}$

Вычисл-е след. ит-ции вычисл-ся с помощью простой явной фор-лы т/з предыдущую итерацию.

Позже увидим, что этот метод сходится очень медленно.

② Метод Зейделя.

$$x_i^{n+1} = \frac{f_i}{a_{ii}} - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^{n+1} - \sum_{j=i+1}^{m} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} x_j^n, \quad i = \overline{1,m}, \quad n = 0,1,\ldots$$

x^0 – задано

Этот метод более надёжен, хотя сх-ся также медленно.

Вычисл. процесс надо правил. организовать, чтобы сев-ся от неизвестных:

$$x_1^{n+1} = \frac{f_1}{a_{11}} - \sum_{j=2}^{m} \frac{a_{1j}}{a_{11}} x_j^n$$

$$x_2^{n+1} = \frac{f_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{n+1} - \sum_{j=3}^{m} \frac{a_{2j}}{a_{22}} x_j^n$$

$$\ldots \quad i = \overline{3,m} \quad \ldots$$

При исслед-ии итерац. процессов, их удоб. записывают в матричном виде.

$A = R_1 + D + R_2$, где

A – м-цу A представ. в виде Σ 3-х матриц

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{ij} & & & \\ & j<i & & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{mm} \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_{ij} \\ & & 0 \\ & & j>i \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Запишем (3) в матричном виде в предпол-ии $\exists D^{-1}$, т.е. $a_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1,m}$

$$\rightarrow X = D^{-1}f - D^{-1}R_1 X - D^{-1}R_2 X \quad (4)$$

Метод Якоби

$$X^{n+1} = D^{-1}f - D^{-1}R_1 X^n - D^{-1}R_2 X^n, \quad n = 0,1,\ldots$$

x^0 – зад.

Метод Зейделя

$$X^{n+1} = D^{-1}f - D^{-1}R_1 X^{n+1} - D^{-1}R_2 X^n$$

МЯ $\quad DX^{n+1} + (R_1 + R_2)X^n = f$

МЗ $\quad (D + R_1)X^{n+1} + R_2 X^n = f$

МЯ $\quad D(X^{n+1} - X^n) + AX^n = f$

МЗ $\quad (D + R_1)(X^{n+1} - X^n) + AX^n = f$

Так математики пришли к канонической форме записи.

Введение итерац. парам. (нужен для ускорения сходимости)

МЯ $\quad D\frac{X^{n+1} - X^n}{\tau_{n+1}} + AX^n = f$; $\tau_{n+1} > 0$, $n = 0,1,\ldots$

МЗ $\quad (D + R_1)\frac{X^{n+1} - X^n}{\tau_{n+1}} + AX^n = f$

Из посл. 2-ух ур-ий $\Rightarrow$, что если ит. мет. сх, то он. сх. к реш-ю ур-ия.

Кан. форма записи двухслойного итерац. проц.

(два слоя – по n и по $n+1$).

$\exists$ многосл. ит. проц., кот. сны изучать не будут.

Т.е. Кан. фор. зап. двухслойного итер. метода реш-ия сист. $Ax = f$ наз-ся его запись в виде

$$B_{n+1}\frac{x^{n+1} - x^n}{\tau_{n+1}} + Ax^n = f, \quad (5)$$

$n = 0,1,\ldots$; x^0 – задано (нач. приближ.),

$\tau_{n+1} > 0$ – итерац. параметр,

B_{n+1} такая, что $\exists B_{n+1}^{-1}$ (обратная).

$\{\tau_{n+1}$ и B_{n+1} ввод. для ускоре сх-ти$\}$

Если τ и B от n нез., итер. мет. наз-ся стационарным.
Мы будем расм. именно такие методы.

Если $B=E$, то метод наз. явным.
Если $B=D$, то мет. также явл-ся явным, но, по опр-ю, он явл. явн., если $B=E$.

Вопросы:
- найти усл-я на ω и τ и т. пар-р, при кот. ит. мет. сх-ся.
- изучение скорости сходимости метода

Мы также будем расм. метод простой итерации (релаксации):

$$\frac{x^{n+1}-x^n}{\tau}+Ax^n=f, \quad n=0,1, \quad x^0 \text{ задано}$$

Метод Ричардсона.

$$\frac{x^{n+1}-x^n}{\tau_{n+1}}+Ax^n=f$$

Здесь расм. опт. набор τ_{n+1} – корни много Чебышева (в эт. сл. он сх-ся очень быстро).

- Теперь расм. попеременно-треуг. итер. метод (ПТИМ)

(он значит. лучше остальных)
Предст. A в виде:

$$A=R_1+R_2,$$

где $R_1=\begin{pmatrix} a_{11}/2 & & 0 \\ a_{ij} & \ddots & \\ & & a_{mm}/2 \end{pmatrix}$, $j<i$ — нижнетреуг.; $R_2=\begin{pmatrix} a_{11}/2 & \cdots & a_{ij} \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{mm}/2 \end{pmatrix}$, $j>i$ — верхнетреуг.

$\Rightarrow$ ПТИМ запис-ся в след-м виде

$$(E+\omega R_1)(E+\omega R_2)\frac{x^{n+1}-x^n}{\tau}+Ax^n=f, \quad (6)$$

где $E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $n=0,1,\dots$, x^0 – задано, $\omega>0$, $\tau>0$ – итер-е параметры

Это один из сам. эффект. итер. методов.

$\Rightarrow$ м-ца B имеет вид: $B=(E+\omega R_1)(E+\omega R_2)$ – неявный метод.
Но мы все вычисления по явным формулам.

Сейчас этот метод назвался. (домн-ем на самосопр. сл-ну)

Реализация ПТИМ.

Пок., что несмотря на неявность, мы реал-м его по явным фм.

Введем вектора

$$(E+\omega R_1)\frac{x^{n+1}-x^n}{\tau}=w^{n+1},$$

$r^n=f-Ax^n$ — невязка

$v^{n+1}=\frac{x^{n+1}-x^n}{\tau}$

$\Rightarrow$ ПТИМ можно перет. в виде

1) $(E+\omega R_1)w^{n+1}=r^n \Rightarrow$ нах. w^{n+1}
2) $(E+\omega R_2)\cdot v^{n+1}=w^{n+1} \Rightarrow$ нах v^{n+1}
3) $x^{n+1}=x^n+\tau v^{n+1}$

шаги

18.02. **Лекция 4.**

§6. Теоремы о сходимости итерационных методов.

Зад. закл. в реш-ии сист.

(1) $Ax = f$

с невыр. матрицей $A\ (m \times m)$: $\det A \neq 0$

С помощью двухслойного стац. итер. метода:

(2) $B\dfrac{x^{n+1} - x^n}{\tau} + Ax^n = f$

$n = 0, 1, \dots, \tau > 0$ $\exists B^{-1}$

Мы найдём дост. усл-е сх-ти.
Введём линейное норм-е пр-во.
Док-во будем проводить в г-х нормах.

Введём нормы.
Рассм. лин. пр-во $H: x = (x_1, .., x_m)$
$\dim H = m$ (размерность)
Введём евклидову норму.
$\forall x, y$ – произв-е вектора.
Их скал. произв-е вв. по правилу

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$$

Среднеквадратичная норма

$$\|x\| = (x, x)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right)^{1/2}$$

Теперь лин. пр-во H нормир-е с этой нормой.

Рассм. теперь энергетическую норму
$\exists D = D^* > 0$ – полож. опр. самосопр. оператор.
Введём скалярное произведение

$$(x, y)_D = (Dx, y)$$

$\Rightarrow$ энергетическая норма вект. x в смысле полож. опр. сам. опер. опр-ся след. обр. (она перейдёт в евкл. норму, если $D = E$):

$$\|x\|_D = (Dx, x)^{1/2}$$

Сх-ть будем изучать в опр-ой норме. 28

Напомним алгебр. факты.

$C > 0$ – положит. опр-ый оператор, т.е. $\forall x \neq 0$ $\boxed{(Cx, x) > 0}$

$C \geqslant 0$ $\overset{\text{df}}{\Leftrightarrow}$ $\forall x$ $(Cx, x) \geqslant 0$
(мог. быть ненул. вектора, у кот. образ Cx ортогонален к x)

Если H – комплексное, унитарное пр-во, то $C = C^*$ (иначе (Cx, x) – комплексное, и мы о каком знаке не смогли идти речь).

Нер-во $(Cx, x) > 0$ нам мало: нам надо, чтобы оно было отд. от 0 конст-ой

$\exists C = C^* \Rightarrow \exists$ ОНБ из с.в. $\Rightarrow \forall$-ой вект. можно разл. по базису
если $C > 0$ (ещё) $\Rightarrow$ все с.з. > 0 $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists \delta > 0$: $\boxed{(Cx, x) \geqslant \delta \|x\|^2}$ (мы отделились от нуля)
min с.з.

Задача 1 $\exists H$ – вещ. $C > 0$ (вообще говоря нет $C = C^*$)
Док-ть, что

$$(Cx, x) = \left(\frac{C + C^*}{2}x, x\right)$$

Что это даст?
Мы сможем $\forall$-ой $\lambda 0$ свёртывать его со своей сопряжённой частью.
И соотн-е $(Cx, x) \geqslant \delta \|x\|^2$ тоже можно применять.

Т.к. теперь $C = C^* > 0 \Rightarrow \exists C^{-1} = (C^{-1})^* > 0$

$\Rightarrow \exists C^{1/2} = (C^{1/2})^* > 0$

$\Rightarrow \exists C^{-1/2} = (C^{-1/2})^* > 0$

(это понад-ся при д-ве теоремы)

Введём погрешность:

(3) $\boxed{v^n = x^n - x}$ – погр-ть на n-ой итерации.

Метод сх-ся означает, что $\|v^n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Из (3) $\Rightarrow x^n = v^n + x \Rightarrow$ {подст. в (2)} $\Rightarrow$ для v получим след. задачу:

(4) $\boxed{B\frac{v^{n+1}-v^n}{\tau} + Av^n = 0}$, $n = 0, 1, \dots$; $\tau > 0$

$v^0 = x^0 - x$

$\Rightarrow$ ур-е для погреш-ти такое же как для самого метода, но однор-ное.

Теперь можем приступать к иссл-ю сх-ти.

Перепишем этот двухсл. (однопар-ый) метод в удобном виде:

$$\frac{v^{n+1}-v^n}{\tau} + B^{-1}Av^n = 0$$

$$\Rightarrow v^{n+1} = v^n - \tau B^{-1}Av^n = (E - \tau B^{-1}A)v^n \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ возвращаясь v/з v^n

(обозн. $S = E - \tau B^{-1}A$)

(5) Т.о., $\boxed{v^{n+1} = Sv^n}$, где $\boxed{S = E - \tau B^{-1}A}$ (6)

М-ца (6) нос-ся матрицей перехода от n-ой итер-ции к (n+1)-ой.

Всё, что связ. со сх-ю, будет опираться на свва м-цы S (спектр её соб. зн-ий)

Теор 1. (без док-ва)

Итерац-ый метод (2) решения задачи (1) сх-ся при любом нач. приближении тогда и только тогда, когда все с.з. м-цы S по модулю меньше единицы:

$|\lambda_k^S| < 1$, $k = \overline{1,m}$

(с.зн. в общ. сл. м.б. комплексное и отрицательное $\Rightarrow$ берём по 11)

Если мы бы научились проверять это нер-во, то сх-ть док-на, но иссл-ть спектр м-цы S очень сложно.

Д-во Th 1 в Бахвалове.

{оператор S должен быть сжимающим}

Теперь сф. дост-е усл – теор. Самарского, кот. будет давать очень проверяемое условие.

Зам. С этого момента будем расс. вещественные нрво H.

Теорема (Самарского о дост-х усл-ях сх-ти двухсл. итер. метода)

Пусть оператор A – самосопр., положительно опред-ый ($A = A^* > 0$) и пусть выполнено операторное нер-во $\boxed{B - 0{,}5\tau A > 0}$ ($\tau > 0$) (7)

Тогда итерац-ый метод (2) реш-ия зад (1) сх-ся при любом нач. приближении в среднеквадратичной норме, т.е.

$\forall x^0$ $\|x^n - x\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, т.е.

$$\|x^n - x\| = \left(\sum_{i=1}^{m}(x_i^n - x_i)^2\right)^{1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Зам. Ограничение $A = A^* > 0$ не сильно ограничивает класс реал. практических задач.

Док-во

(1) Введём в рассм. числ. посл. вида $J_n = (Av^n, v^n)$ (невозр.) и пок., что эта ЧП – сходит. и огр-я, сл-но, будет иметь предел.

Огр-ть снизу есть (нулём).

Пок., что она невозр.

$$J_{n+1} = (Av^{n+1}, v^{n+1}) \overset{(5)}{=} (ASv^n, Sv^n) \overset{(6)}{=}$$

$$= (A(E-\tau B^{-1}A)v^n, (E-\tau B^{-1}A)v^n) =$$

= {раскрыли, исп-я аксиомы скал. произв. в вещ. пр-ве} =

$$= ((A-\tau AB^{-1}A)v^n, (E-\tau B^{-1}A)v^n) = \{\text{дистр-ть}\} =$$

$$= \underbrace{(Av^n, v^n)}_{J_n} - \tau\underbrace{(AB^{-1}Av^n, v^n)}_{\text{A-самосопр.}} - \tau(Av^n, B^{-1}Av^n) +$$

$$+ \tau^2(AB^{-1}Av^n, B^{-1}Av^n) \overset{=}{=} \{(B^{-1}Av^n, Av^n) - \text{эти слаг-е одинак-е}\}$$

$$\overset{=}{=} J_n - 2\tau(B^{-1}Av^n, Av^n) + \tau^2(AB^{-1}Av^n, B^{-1}Av^n) =$$

= {поменяем местами и снова исп-ем дистр-ть}

$$= J_n - 2\tau\underbrace{\left[\left(B-\frac{1}{2}\tau A\right)B^{-1}Av^n, B^{-1}Av^n\right]}_{\geq 0 \text{ (по усл.)}} \geq 0 \quad (\text{т.к } v^n \text{ м.б.} \overset{=}{=} 0)$$

$$\{-2\tau\left[Av^n - \tfrac{1}{2}\tau AB^{-1}Av^n, B^{-1}Av^n\right]\}$$

$\Rightarrow J_{n+1} \leq J_n$ (невозр.)

и огр-я $J_n = (Av^n, v^n) \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} J_n = J$

(2) {перенесём J_n влево и поделим на τ} $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ получим осн. энерг. тождество

$$\frac{J_{n+1}-J_n}{\tau} + 2\left[\underbrace{\left(B-0{,}5\tau A\right)}_{C>0}B^{-1}Av^n, B^{-1}Av^n\right] = 0$$

(C – не самосопр.)

Зам. Если $C > 0$, т-ть, что $\exists \delta > 0$:

$$(Cx, x) \geq \delta\|x\|^2 = \delta(x,x)$$

(Задача 2)

(учит. задачу)

По усл-ю теоремы $\exists \delta > 0$:

$$\left(\left(B-\tfrac{1}{2}\tau A\right)B^{-1}Av^n, B^{-1}Av^n\right) \geq \delta\|B^{-1}Av^n\|^2 \geq 0$$

(мы отделились от нуля; оператор $\left(B-\frac{1}{2}\tau A\right) > 0$ (не самосопр.))

(3) Переходим к пределу $n \to \infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\|B^{-1}Av^n\| = 0$ (т.к. $J_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} J$, $J_n \xrightarrow[n\to\infty]{} J$)

Введём вектор $w^n = B^{-1}Av^n \Rightarrow$ {A и B – обратимы}

$\Rightarrow Bw^n = Av^n \Rightarrow v^n = A^{-1}Bw^n \Rightarrow$

$\Rightarrow$ {через Коши – Буняковского} $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 \leq \|v^n\| \leq \underbrace{\|A^{-1}B\|}_{\text{не зависит от } n} \cdot \|w^n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\|v^n\| = 0, \text{ ч. и т.д.}$$

Зам. Нач. приближение при этом любое.

Теперь применим эту теорему.

Сл-ие (из теор. Сам.)

• Метод Якоби – имеет вид

$$D(x^{n+1}-x^n) + Ax^n = f$$

Сопост-ем с (2) $\Rightarrow B = D$, $\tau = 1$

След. 1 $\exists A = A^* > 0$ (самосопр., полож. опр-й), $\exists$ вещ. матричное (опер-е) нер-во: $2D > A$ $\Rightarrow$ метод Якоби сходится при любом нач. приближении в ср. кв. норме.

Док-во По т. Самар., если $(B - 0{,}5\tau A) > 0$, то ит. метод сх. при $\forall x^0$.
Вып. $D - 0{,}5A > 0$, т.к. $2D > A$.

Задача 3 $A = A^* > 0 \Rightarrow a_{ii} > 0$, $i = \overline{1,m}$

$\exists \{e_i\}$ - ОНБ $\Rightarrow (x,y)$ в нем $= \sum x_i y_i$ (ск-ние на главн. диаг.)
$\Rightarrow (Ae_i, e_i) = a_{ii} > 0$, т.к. $A > 0$ т. и т.д.

Следствие. Пусть матрица A обладает строгим диагональным преобладанием, т.е.

$$a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{m} |a_{ij}|, \quad i = \overline{1,m} \tag{8}$$

(ск-т на гл. диаг. > чем Σ всех ост. эл-ов в строке)

Пусть м-ца A также самосопр. и полож. опред-е ($A = A^* > 0$).
Тогда метод Якоби сх-ся при любом нач. приближении в среднекв. норме.

Замеч. Это достат. усл-е (диаг. преобл-я) легко проверить.

Док-во Рассм. квадр. форму

$$(Ax, x) = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j$$

Поработаем с этими скоб. произведениями (сделаем оценки).
Преобр. ее так, чтобы пок-ть, что $2D > A$

$$(Ax, x) \le \sum_{i,j=1}^{m} |a_{ij}||x_i||x_j| \le \{ab \le \tfrac{1}{2}(a^2 + b^2)\} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} |a_{ij}||x_i|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{m} |a_{ij}||x_j|^2 \quad (=) \{a_{ij} = a_{ji},\ т.к.\ A - симм.\}$$

$$(=) \sum_{i,j=1}^{m} |a_{ij}||x_i|^2 = \sum_{i=1}^{m} \Big(a_{ii} + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{m} |a_{ij}|\Big) x_i^2 \quad (*)$$

(модуль опустили (за ск.))

Из (8) $\Rightarrow 2a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{m} |a_{ij}| + a_{ii}$

$$(*) \sum_{i=1}^{m} 2a_{ii} x_i^2 = (2Dx, x) \quad \{D - \text{диагональ } a_{ii},\ x - \text{вектор}\}$$

$\Rightarrow 2D > A \Rightarrow \{$след. 1$\} \Rightarrow$ метод Якоби сх-ся.

След. 3. Пусть $A = A^* > 0$
$\Rightarrow$ метод Зейделя сх-ся при любом нач. приближении x^0 в среднекв. норме.

Док-во $(D + R_1)(x^{n+1} - x^n) + Ax^n = f$

$B = D + R_1$ (мтр. A), $\tau = 1$ (сравн-я с (2))

усл-е $B - \frac{1}{2}\tau A > 0$

$D + R_1 > \frac{1}{2}(R_1 + D + R_2)$

$\frac{D}{2} + \frac{R_1}{2} - \frac{R_2}{2} > 0$, т.е. $D + R_1 - R_2 > 0$

$\Rightarrow ((D + R_1 - R_2)x, x) > 0$ (должно быть),

т.е. $(Dx, x) + (R_1 x, x) - (R_2 x, x) > 0$

$\Rightarrow \{(R_1 x, x) = (x, R_1^* x) = (x, R_2 x)\} \Rightarrow$ {после 2 сокр-ся}

$\Rightarrow (Dx, x) > 0 \Rightarrow D > 0$. (верхн. Δ)

(т.к. $a_{ii} > 0$)

25.02. Лекция 5.

Метод простой итерации

$$\frac{x^{n+1}-x^n}{\tau}+Ax^n=f$$

Следствие. $\exists A=A^*>0$, $\gamma_2=\max\limits_{1\le k\le n}\lambda_k^A$ (max с.з. матрицы A).

Если выбрать τ:

(9) $$\boxed{0<\tau<\frac{2}{\gamma_2}}$$

$\Rightarrow$ метод прост. ит. сх-ся при $\forall$ нач. приближении x^0 в среднеквадр. норме.

Зам. γ_2 – всегда полож. число (!! не пишем)

Док-во достат. усл-е $B-0{,}5\tau A>0$

$B=E \Rightarrow E-0{,}5\tau A>0$ (надо это доказать)

$\Rightarrow$ должно быть: $1-0{,}5\tau\lambda_k^A>0$ $\forall k$, где λ_k^A – с.з. матрицы A

$\Rightarrow$ должно выполняться и для γ_2 $1-0{,}5\tau\gamma_2>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{0<\tau}_{\text{из ит. метода}}<\frac{2}{\gamma_2}$ (это выполнено)

$\Rightarrow$ по т. Сам. ит. мет. сх. при $\forall$ нач. приб. ■

§7. Оценка скорости сходимости итерационных методов.

Будем искать усл-я, когда ИМ сх-ся наиб. быстро.

Решаем СЛАУ

$$Ax=f \qquad (1)$$

с невырожд. матрицей $|A|\neq 0$ ($A-m\times m$)

Применяем для решения (1) двухслойн. стац. ИМ:

$$B\frac{x^{n+1}-x^n}{\tau}+Ax^n=f \qquad (2)$$

$\tau>0$, $n=0,1,\dots$, x^0 – задано

Вектор погр-ти на n-й итерации $v^n \stackrel{\text{def}}{=} x^n-x$

$\Rightarrow$ для него выполнено

$$B\frac{v^{n+1}-v^n}{\tau}+Ax^n=0 \qquad (3)$$

$n=0,1,\dots$; $\tau>0$; $v^0=x^0-x$

Попытаемся получить оценки вида

$$\|v^{n+1}\|\le\rho\|v^n\|, \qquad (4)$$

$n=0,1,\dots$, $0<\rho<1$

Оценим погр-ть на n-й ит. ч/з v^0:

$$\|v^n\|\le\rho^n\|v^0\| \qquad (5)$$

(исп-я (4) как рек. соотн-е)

$$\Rightarrow \|v^n\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

Т.е. оценки вида (4) означают сх-ть. Но нам надо понять, когда она более быстрая

Если $\rho\to 0$, то сх-ть более быстрая, если $\rho\to 1$, то сх. медленная.

Т.е. ρ – регулятор скорости сх-ти при выборе метода.

Из оц. (4) можно уже указать кол-во итераций, необх. для достиж-я точности ε:

Точность ε результата означает нер-во

$$\|x^n - x\| \le \varepsilon \|x^0 - x\|$$

Сопоставим это нер-во с (5) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \rho^n \le \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{\rho}\right)^n \ge \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$ {прологарифмируем} $\Rightarrow$

$\Rightarrow n \ln\left(\frac{1}{\rho}\right) \ge \ln\frac{1}{\varepsilon}$.

(6) Мы указываем число

$$n_0(\varepsilon) = \left[\frac{\ln 1/\varepsilon}{\ln 1/\rho}\right]$$ такое, что

$\Rightarrow$ при $n \ge n_0(\varepsilon)$ зад. (1) будет решена с точ-ю ε.

Чем < итерац. реш. дост-ся опред. точность, тем ит. мет. лучше. (надо совершить)

Число $\ln\frac{1}{\rho}$ наз. <u>скоростью сх-ти итер. метода.</u>

Когда скор. сх – наиб., число итераций $n_0(\varepsilon)$ – наименьшее.

Пусть H – линейное пр-во: $\dim H = m$.

Введём скал. произв-е в ОНБ:

$$\forall x, y \in H \quad (x, y) = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$$

Сделаем это пр-во нормированным — введём норму (среднекв.):

$$\|x\| = (x, x)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^{1/2}$$

$\exists C = C^* > 0 \Rightarrow \forall x, y$ можно ввести (скал произв) (Cx, y)

$\Rightarrow \|x\|_C = (Cx, x)^{1/2}$ – энергетич. норма, порожд. ЛО C.

/* когда $C = E \Rightarrow$ (эта) норма перех. в среднекв. */

<u>Факт из алгебры:</u>

Если $C = C^* > 0 \Rightarrow C$ – нормальный (ЛО) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ у него есть ОНБ $e_1, \dots, e_m$ из собств. векторов.

$\Rightarrow \forall x \in H$ можно однозн. разложить по этому базису

$$x = \sum_{k=1}^{m} c_k e_k$$

В этом простр-ве справедливо <u>рав-во Парсеваля</u>: $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{m} c_k^2$,

c_k – коэф-т Фурье разложения по ОНБ.

<u>Теор 1</u> (об оценке скорости сх-ти ит. мет-в)

Пусть $A = A^* > 0$, H – вещественное (пр-во), $B = B^* > 0$,

$\exists$ существует число ρ: $0 < \rho < 1$, такое что выполнено операторное нер-во

$$\frac{1-\rho}{\tau} B \le A \le \frac{1+\rho}{\tau} B \qquad (7)$$

$\Rightarrow$ для решения задачи (3) имеет место оценка

$$\|v^{n+1}\|_B \le \rho \|v^n\|_B \qquad (8)$$

$n = 0, 1, \dots$

/* $\|\ \|_B$ – энергетич. норма, порожд. оператором B */

/* мы сузили класс операторов B по сравн. с th. Сам.: $B = B^* > 0$ */

<u>Док-во</u>

Пок. сначала, что при вып-ии усл-ий (7) сх-ть имеет место:

$A < \frac{2}{\tau} B \Rightarrow B - 0{,}5\tau A > 0 \Rightarrow$ по th. Сам. имеем сх-ть

(т.к. $\rho < 1$)

Док-во сост. из 2-ух частей:

- перепишем (3) и пок., что оп-ра перех. от n-й ит. к $n+1$: все ее с.з. (по модулю) $\le \rho$
- исп-я рав-во Парсеваля, получим оценку (8)

1. Перепишем зад., учитывая что
$\exists B^{1/2} = (B^{1/2})^* > 0$; $B^{-1/2} = (B^{-1/2})^* > 0$ (это следует из $B = B^* > 0$)

К ур-ю (3) слева применим оператор $B^{-1/2}$ ⇒

$$\Rightarrow B^{1/2}\frac{v^{n+1}-v^n}{\tau} + B^{-1/2}Av^n = 0$$

Введём вектор $z^n \overset{df}{=} B^{1/2}v^n$ ⇒

⇒ это ур-е можно записать так

$$\frac{z^{n+1}-z^n}{\tau} + B^{-1/2}AB^{-1/2}z^n = 0$$

Разрешим задачу относ-но z^{n+1}:

$$z^{n+1} = z^n - \tau B^{-1/2}AB^{-1/2}z^n = (E - \tau B^{-1/2}AB^{-1/2})z^n$$

(9) Обозн. $S \overset{df}{=} E - \tau B^{-1/2}AB^{-1/2}$ – матрица перехода от n-й ит-ии к $(n+1)$-ой.

Будем изучать спектр (с.з-е) м-цы S и пок., что все её с.з. по модулю не превосх. ρ.

Пок, что $S = S^*$ (самосопряж.)

$$S^* = (E - \tau B^{-1/2}AB^{-1/2})^* = E^* - \tau(B^{-1/2})^*A^*(B^{-1/2})^* =$$
$$= E - \tau B^{-1/2}AB^{-1/2} = S$$

Запишем зад. на с.зн-ие для м-цы S:

$Sx = s_k x$, где $x \neq 0$, $k = \overline{1,m}$,

s_k – с.з м-цы S, x – с.вектор.

Перепишем эту зад. в виде:

$$(E - \tau B^{-1/2}AB^{-1/2})x = s_k x \quad , k = \overline{1,m}$$

// домножим слева на невырожд. опр $B^{1/2}$

$$(B^{1/2} - \tau AB^{-1/2})x = s_k B^{1/2}x$$

Обозн. $y = B^{-1/2}x$ ⇒ $x = B^{1/2}y$ (подставим)

$$\Rightarrow (B - \tau A)y = s_k By \Rightarrow B(1-s_k)y = \tau Ay \Rightarrow$$

$$\overset{\tau \neq 0}{\Rightarrow} (1-s_k)By = \tau Ay \Rightarrow Ay = \frac{1-s_k}{\tau}By \Rightarrow$$

⇒ {умн. посл. рав-во скалярно на $y \neq 0$}

$$\Rightarrow (Ay, y) = \frac{1-s_k}{\tau}(By, y) \overset{(7)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{1-\rho}{\tau}(By,y) \leq (Ay,y) = \frac{1-s_k}{\tau}(By,y) \leq \frac{1+\rho}{\tau}(By,y)$$

{$(By,y) > 0$, т.к. $y \neq 0 \overset{(By,y)}{\Rightarrow} = (B^{1/2}y, B^{1/2}y) = (x,x) > 0$}

⇒ {сократим на (By,y)} ⇒

$$\Rightarrow \frac{1-\rho}{\tau} \leq \frac{1-s_k}{\tau} \leq \frac{1+\rho}{\tau} \Rightarrow -\rho \leq s_k \leq \rho \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |s_k| \leq \rho \,, \quad k = \overline{1,m} \qquad (**)$$

2. $z^{n+1} = Sz^n$ – имеем

$\Rightarrow \|z^{n+1}\| \leq \rho\|z^n\|$ (док-м это) (*)

$z^n = B^{1/2}v^n$ (по опр.) ⇒ $(z^n, z^n) = \|z^n\|^2 = (B^{1/2}v^n, B^{1/2}v^n) =$

$= (Bv^n, v^n) = \|v^n\|_B^2$ ⇒ если вып-но (*), то (8) также вып-но */

Т.к. $S = S^*$, то $\exists$ ОНБ $e_1, e_2, \ldots, e_m$ из соб. векторов

$\Rightarrow Se_k = s_k e_k$, $e_k \neq 0$, $k = \overline{1,m}$

Берём z^n и раскл. его по ОНБ из с.в.:

$$z^n = \sum_{k=1}^{m} c_k^{(n)} e_k$$

{n – номер итерации}

$$z^{n+1} = Sz^n = \sum_{k=1}^{m} c_k^{(n)} Se_k = \sum_{k=1}^{m} c_k^{(n)} s_k e_k$$

⇒ {вос. рав-вом Парсеваля} $\|z^{n+1}\|^2 = \sum_{k=1}^{m} (c_k^{(n)})^2 s_k^2 \leq$

$$\overset{(**)}{\leq} \rho^2 \sum_{k=1}^{m} (c_k^{(n)})^2 = \rho^2 \|z_n\|^2 \}$$

⇒ получили оц. (*), из кот. следует оценка (8) в энер. норме B. ■

Замеч. операторное нер-во (7).
Оно проверяется не просто.
Сф. след. (для простоты пров-ки).

Следз. $\exists A=A^*>0$, $B=B^*>0$,
$\exists \exists$ такие конст. $\gamma_2>\gamma_1>0$, что
$$\boxed{\gamma_1 B \le A \le \gamma_2 B}$$
(это будет связ. с max и min с.з.)

$\Rightarrow$ для решения (3) имеет место оценка $\|v^{n+1}\|_B \le \rho \|v^n\|_B$, где

если положить $\tau=\tau_0=\dfrac{2}{\gamma_1+\gamma_2}$, то

$$\rho=\frac{1-\xi}{1+\xi},\quad \xi=\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$ (число обусловленности)

ξ - мало $\Rightarrow \rho \to 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ затух. е слабое.

Док-во

Чтобы прим. Th.1, полагаем

$$\gamma_1=\frac{1-\rho}{\tau},\quad \gamma_2=\frac{1+\rho}{\tau}$$

Пересчитаем ρ: $\gamma_1+\gamma_2=\dfrac{2}{\tau} \Rightarrow$ τ выбираем как:

$$\boxed{\tau=\frac{2}{\gamma_1+\gamma_2}}$$

$$\gamma_2-\gamma_1=\frac{2\rho}{\tau}=\rho(\gamma_1+\gamma_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho=\frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_2+\gamma_1}=\frac{1-\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}{1+\frac{\gamma_1}{\gamma_2}}=\frac{1-\xi}{1+\xi},\ \text{где}\ \xi=\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$ ■

Следз имеет более информативную форму, чем оценка в Th1.

Замеч. γ в следз – это спектр обобщ. зад.
$$Ax=\lambda Bx$$

Метод простой итер.
$$\frac{x^{n+1}-x^n}{\tau}+Ax^n=f$$

Следз. $\exists A=A^*>0$, $\exists \gamma_1=\min\limits_{1\le k\le m}\lambda_k^A$,
$\gamma_2=\max\limits_{1\le k\le m}\lambda_k^A$

Если τ взять в виде:
$$\boxed{\tau=\frac{2}{\gamma_1+\gamma_2}},$$
то для реш-ия зад. (3) имеет место оценка
$$\|v^{n+1}\| \le \rho \|v^n\|,$$
где $\rho=\dfrac{1-\xi}{1+\xi}$, $\xi=\dfrac{\gamma_1}{\gamma_2}$

Док-во ξ такое же как в след 1, $B=E$ ξ

Факт ρ будет ближе к 0 $\Leftrightarrow$ $\xi \to 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \gamma_1 \to \gamma_2$

↳ Т.е. если γ_2 и γ_1 близки $\Rightarrow$ сх-ть хорошая, если нет – плохая.

02.03. Лекция 6.

§8. Исследование сходимости попеременно треугольного итерац-го метода (ПТИМ).

Решаем сист.

(1) $Ax = f$

$\det A \neq 0$, A $(m \times m)$

Общий вид ПТИМ:

(2) $B\frac{x^{n+1}-x^n}{\tau} + Ax^n = f$

$\tau > 0$, $n = 0, 1, \dots$, $\exists B^{-1}$

(3) ПТИМ: $B = (E + \omega R_1)(E + \omega R_2)$, где

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0{,}5a_{11} & \dots & 0 \\ a_{ij} & \ddots & 0{,}5a_{mm} \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 0{,}5a_{11} & \dots & a_{ij} \\ 0 & \ddots & 0{,}5a_{mm} \end{pmatrix},$$

$A = R_1 + R_2$

ПТИМ явн. неявными. Несмотря на это метод можно реализовать по явным формулам.

ПТИМ на порядок более быстрый, чем остальные. (мы это покажем)

Теорема: о сх-сти и об оценке скорости сх-сти

Числами τ и ω можно варьировать.

Рассм-им веществ. м-цу $A = A^* > 0$

Теорема 1 (о дост. усл-ях сх-сти ПТИМ)

$\exists A = A^* > 0$

$\Rightarrow$ если $\boxed{\omega > \frac{\tau}{4}}$, то ПТИМ (2) реш-я сист. (1) сходится в среднеквадратичн. норме при $\forall$ начальном приближении.

Оператор B запишем в виде:

Док-во. $B = (E + \omega R_1)(E + \omega R_2) =$

$= (E + \omega R_1 + \omega R_2 + \omega^2 R_1 R_2) = E + \omega A + \omega^2 R_1 R_2 =$

$= \{R_1 = R_2^*\} = E + \omega A + \omega^2 R_2^* R_2$

$\Rightarrow B = (E - \omega R_2^*)(E - \omega R_2) + 2\omega A$

Исследуем такую запись B.

Обозн. $C = E - \omega R_2 \Rightarrow C^* = E^* - \omega R_2^* = E - \omega R_2^*$

$\Rightarrow C^* C \geqslant 0$, т.к. $(C^* C x, x) = (Cx, Cx) = \|Cx\|^2 \geqslant 0$ $\forall x$ (по усл-ю сопряж-я)

Т.о., $B \geqslant 2\omega A$, т.к. 1-ое слаг. неотриц-е

Вспомним: в неравенстве Сам. преб-ся $B - 0{,}5\tau A > 0$, т.е. $B > 0{,}5\tau A$

$\Rightarrow$ если взять $2\omega > 0{,}5\tau$, т.е. $\omega > \frac{\tau}{4}$, то по Th Сам. ПТИМ сх-ся при $\forall$ нач. приближении.

Зам. усл-е $\omega > \frac{\tau}{4}$ проверяется просто

Нас интересует скорость сходимости

Теорема 2 (об оценке скорости сх-ти ПТИМ)

Пусть $A = A^* > 0$, $\exists$ константы $\delta > 0$, $\Delta > 0$: выполнены след. операторные нер-ва:

$$\boxed{A \geqslant \delta E \ ; \ R_2^* R_2 \leqslant \frac{\Delta}{4} A} \quad (4)$$

Положим $\omega = \frac{2}{\sqrt{\delta \cdot \Delta}}$, $\tau = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}$, где (5)

$$\gamma_1 = \frac{\delta}{2}\left(\frac{\sqrt{\delta \cdot \Delta}}{\delta + \sqrt{\Delta}}\right), \quad \gamma_2 = \frac{\sqrt{\delta \cdot \Delta}}{4} \quad (6)$$

$\Rightarrow$ для погреш-ти ПТИМ справедлива оценка

$$\boxed{\|x^{n+1} - x\|_B \leqslant q \|x^n - x\|_B}, \text{ где} \quad (7)$$

$B = (E + \omega R_2^*)(E + \omega R_2)$, $q = \frac{1 - \sqrt{\gamma}}{1 + 3\sqrt{\gamma}}$, $\gamma = \frac{\delta}{\Delta}$. (8)

Зам. наличие оценки (*) сх-ть уже обеспечивает ($\tau_{min}\rho<1$) – сх-ть со скор. геом. прогр. со зн-ем ρ.

Док-во.

- док., что $\delta \le \Delta$

(**) (4) $\overset{1}{\Rightarrow}$ $(Ax,x) \ge \delta(Ex,x) = \delta\|x\|^2$

(*) (4) $\overset{2}{\Rightarrow}$ $(R_2^* R_2 x, x) = (R_2 x, R_2 x) = \|R_2 x\|^2 \le \frac{\Delta}{4}(Ax,x)$

Зам. чем ближе δ к Δ, тем лучше сходимость (задача хорошо обусловлена)

$\delta\|x\|^2 \overset{(**)}{\le} (Ax,x) \le$

$(Ax,x) = ((R_2^* + R_2)x, x) = (R_2^* x, x) + (R_2 x, x) =$ (1 – тк. пр-во евклидово)

$= 2(R_2 x, x)$ */

$\le \frac{(Ax,x)^2}{(Ax,x)} = \frac{4(R_2 x, x)^2}{(Ax,x)} \le$

/* по нер-ву Коши–Бун.

$(R_2 x, x)^2 \le \|R_2 x\|^2 \|x\|^2$ */

$\le \frac{4\|R_2 x\|^2 \|x\|^2}{(Ax,x)} \overset{(*)}{\le} \frac{4\frac{\Delta}{4}(Ax,x)\|x\|^2}{(Ax,x)} = \Delta\|x\|^2$

$\Rightarrow \boxed{\delta \le \Delta} \Rightarrow 0 \le \rho < 1 \Rightarrow$ ПТНМ сх-ся

- будем опираться на след 1 Th об оценке скор. сх-ти.

Вспомним.

След 1 Если $\exists$ конст γ_1, γ_2:

$\gamma_1 B \le A \le \gamma_2 B$,

то имеет место оц. (*)

Мы покажем, что $B \ge 2wA$ (в док-ве Th 1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow A \le \frac{1}{2w} B \Rightarrow \gamma_2 = \frac{1}{2w}$ (выбираем)

Найдём γ_1.

$B = E + wA + R_2^* R_2 w^2 \le$ (выпис. при д-ве Th сх-ти)

$\overset{(4)}{\le} \left(\frac{1}{\delta} + w\right)A + w^2 \frac{\Delta}{4} A = \left(\frac{1}{\delta} + w + w^2\frac{\Delta}{4}\right)A$

Выбираем $\gamma_1 = \left(\frac{1}{\delta} + w + w^2\frac{\Delta}{4}\right)^{-1}$.

Т.е. конст. γ_1 и γ_2 мы перенесли $c/з$ δ, Δ и w.

В **след 1** было:

если выбрать $\tau = \tau(w) = \frac{2}{\gamma_1(w) + \gamma_2(w)}$,

то имеет место оц.

$\|x^{n+1} - x^n\|_B \le \rho(w)\|x^n - x\|_B$,

где $\rho(w) = \frac{1 - \xi(w)}{1 + \xi(w)}$, $\xi(w) = \frac{\gamma_1(w)}{\gamma_2(w)}$.

Будем подбирать w так, чтобы минимизировать ρ.

Если $\xi \to 1$, то $\rho \to 0$

Введём функ $f(w) = \frac{\gamma_1(w)}{\gamma_2(w)}$. При таком w, при кот-м $f(w)$ будет иметь наименьшее значение, сх-ть будет самая быстрая

$f(w) = \frac{\gamma_1(w)}{\gamma_2(w)} \overset{\text{из найденного вида } \gamma_1 \text{ и } \gamma_2}{=} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\delta w} + w\frac{\Delta}{4}\right)$

Будем иссл-ть min этой функц.

$f'(w) = \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{4} - \frac{1}{\delta w^2}\right) = 0$

$\frac{\Delta}{4} = \frac{1}{\delta w^2} \Rightarrow w^2 = \frac{4}{\delta\Delta} \Rightarrow \boxed{w = \frac{2}{\sqrt{\delta\Delta}}} \Rightarrow$ (в этой т. w и достигается min)

$\Rightarrow$ такое w в форм-ке теор. мы и выбираем.

Док., что это min:

$f''(w) = \frac{1}{\delta w^3} > 0$ – min

Выбираем $\Rightarrow \boxed{\tau = \frac{2}{\gamma_1(w)+\gamma_2(w)}}$

$\boxed{\gamma_2(w) = \frac{\sqrt{\delta\Delta}}{4}}$; $\boxed{\gamma_1(w) = \left(\frac{1}{\delta}+w+w^2\frac{\Delta}{4}\right)^{-1}} =$

$\frac{1}{2w}$ (подставим w) $= \boxed{\frac{\sqrt{\delta}}{2}\left(\frac{\sqrt{\delta\Delta}}{\sqrt{\delta}+\sqrt{\Delta}}\right)}$

$\boxed{\rho = \frac{1-\zeta(w)}{1+\zeta(w)}, \zeta = \frac{\gamma_1(w)}{\gamma_2(w)}}$

Перечитаем ρ и ζ в терминах δ и Δ:

$\zeta = \frac{\gamma_1(w)}{\gamma_2(w)} = \frac{\sqrt{\delta}\sqrt{\delta\cdot\Delta}\cdot 4}{2(\sqrt{\delta}+\sqrt{\Delta})\sqrt{\delta\cdot\Delta}} = \frac{2\sqrt{\delta}}{\sqrt{\delta}+\sqrt{\Delta}}$

$\boxed{\rho = \frac{1-\zeta(w)}{1+\zeta(w)}} = \frac{1-\frac{2\sqrt{\delta}}{\sqrt{\delta}+\sqrt{\Delta}}}{1+\frac{2\sqrt{\delta}}{\sqrt{\delta}+\sqrt{\Delta}}} = \frac{\sqrt{\Delta}-\sqrt{\delta}}{\sqrt{\Delta}+3\sqrt{\delta}} =$

$= \frac{1-\sqrt{\frac{\delta}{\Delta}}}{1+3\sqrt{\frac{\delta}{\Delta}}} = \boxed{\frac{1-\sqrt{\eta}}{1+3\sqrt{\eta}}}$, где $\boxed{\eta = \frac{\delta}{\Delta}}$ ■

Получили в след. кот. позволяет сопоставить ПТНМ по числу итераций с др. НМ.

Зам η – величина малая $\eta = O(m^{-2})$, m – порядок матрицы

$n_0(\varepsilon) = \left[\frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\frac{1}{\rho}}\right]$

оценим кол-во итераций $n_0(\varepsilon)$ з/з (m).

$\frac{1}{\rho} = \frac{1+3\sqrt{\eta}}{1-\sqrt{\eta}} \approx (1+3\sqrt{\eta})(1+\sqrt{\eta}) \approx 1+4\sqrt{\eta}$

$\Rightarrow \ln\frac{1}{\rho} \approx 4\sqrt{\eta} \Rightarrow n_0(\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\eta}}\right) = O(m)$

$\Rightarrow$ <u>число ит-ций ПТНМ</u> $\approx$ <u>порядку решаемой задачи</u>

Оценим сколько итераций необх в сист. ПН для достиж-я точн. ε.

МПН: $\frac{x^{n+1}-x^n}{\tau} + Ax^n = f$

$\rho = \frac{1-\eta}{1+\eta}$, $\eta = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$, $\eta = O(m^{-2})$

число итераций:

$\frac{1}{\rho} = \frac{1+\eta}{1-\eta} \approx 1+2\eta$

$\Rightarrow \ln\frac{1}{\rho} \approx 2\eta \Rightarrow \boxed{n_0(\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\eta}\right) = O(m^2)}$

$\Rightarrow$ число шагов на порядок $>$, чем в ПТНМ

Т.о., ПТНМ – один из лучших.

§9. Методы решения задач на собственные значения.

Постановка задачи:

$A(m \times m)$ – любая матрица.

Ищем нетрив. реш-ия

$$Ax = \lambda x, \quad x \neq 0 \qquad (1)$$

λ – собств. значения (с.з.)

x – собств. векторы (с.в)

проблема – реш-е ур-ия (1), где неизвестно и λ, и x.

Зам, что соб. вектор – нетривиален.

Задача (1) опред-ся с точ-ю до константы, поэтому с.в. обычно нормируют: $\|x\| = 1$.

С т.з. алг-ры проблема нет: с.з. – корни хар. ур-ия.

С учётом кратности их m штук:

$$Ae_k = \lambda_k e_k, \quad k = \overline{1,m}$$

Хар. ур-е имеет вид:

$$|A - \lambda E| = 0 = a_m \lambda^m + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

Если A – самосопр., то все с.з. – вещественные.

Решить ур-е m-ой степ. –

$$a_m \lambda^m + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

– это очень сложная задача (при больших m)

При больших m эта задача аналитически не решается – она решается только численно.

ex в МПИ надо оценить наиб и наим. с.з.

⇓

проблема с.зн. очень необходима.

Проблема с.з. делится на две:

1) частичная пробл. с.з. (заключ. в нах-ии отдельных с.з. – ex наиб и наим по модулю)
2) полная проблема с.з. (заключ-ся в нах-ии всего спектра с.зн-ий)

∃ очень мало НМ реш-ия этой зад.

Полная пробл. нах-я с.зн-ий гораздо более сложная.

Степенной метод решения пробл. с.з.

Обозн. x_n – n-я итерация.

Степ. мет. имеет вид:

$$x_{n+1} = Ax_n, \qquad (2)$$

$n = 0, 1, \dots$, A – исх. м-ца, x_0 – начал. приближение

Все m с.зн-ий имеет не ∀ оператор, а только оператор простой стр-ры.

ex самосопр. опер-р имеет базис из собств. векторов.

Ещё более широкий класс – класс нормальных операторов:

$$A^*A = AA^*$$

Зам Соб. вектора, отвеч. различ. с.зн-ям, всегда лин. независимы:

$$\lambda_i \neq \lambda_j \Rightarrow x_i \text{ и/н } x_j$$

Если с.зн. кратное, то кол-во ЛН с.в. будет ≤ его кратности.

В дальнейшем будем считать, что оператор имеет базис из собств. векторов.

03.03. **Лекция 7.**

Все подходы решения част. пробл. с.з. — итерац-е.

Сам. распр. — это степ. метод

$A(m\times m)$

(1) $Ax=\lambda x,\ x\neq 0$

(2) $\boxed{x_{n+1}=Ax_n}$, $n=0,1,\dots$; x_0 – нач. приближение (должно выб-ся в соотв. с нек. отр-ми)

Сделаем 3 предположения:

A) $\exists^{\text{у оп. } A}$ базис из собств. векторов $e_1,e_2,\dots,e_m=\{e_k\}_1^m$: $Ae_k=\lambda_k e_k$

Занумеруем с.з. в порядке неубывания модуля

$$|\lambda_1|\le|\lambda_2|\le\dots\le|\lambda_{m-1}|\le|\lambda_m|$$

B) $\left|\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right|<1$ — однократность с.з.

Разложим нач. приб-е по базису

$$x_0=c_1e_1+c_2e_2+\dots+c_me_m$$

C) $c_m\neq 0$

Зам. Усл. A) вып. для всех норм. операторов.

Теперь в предп-ии усл. A)–C) док., что степ. мет. сх-ся.

Утв. $\exists$ для м-цы A вып. усл-я A), B), C) $\Rightarrow$ степ. метод сх-ся по направлению к собств. вектору, отвечающему max по модулю собств. значению:

$x_n\to e_m$

Зам. можно говорить только о сх-ти по напр-ю — длина опр-ся с точ. до конст-ты.

Док-во. Рассм. ф-лу (2) как рекурр. соотн-е:

$$x_n=A^nx_0\ (=)$$

Зам. Если у A с.з. λ, то у A^n с.з. λ^n

$(=)$ {разложим x_0 по базису} $=\sum_{k=1}^{m}c_k\lambda_k^ne_k\ (=)$

{учтём, что $Ae_k=\lambda_ke_k$}

$$(=)\ c_m\lambda_m^ne_m+c_{m-1}\lambda_{m-1}^ne_{m-1}+\dots+c_1\lambda_1^ne_1$$

$\Rightarrow$ {учтём предпол-е C)}

$$\frac{x_n}{c_m\lambda_m^n}=e_m+\frac{c_{m-1}}{c_m}\left(\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right)^ne_{m-1}+\dots+\frac{c_1}{c_m}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_m}\right)^ne_1$$

{$\lambda_m\neq 0$ в силу B) и т.к. это max по |I с.з.}

Устремим $n\to\infty$ $\Rightarrow$ $x_n\to e_m$ (сх-ть по направлению)

$$\left\{\left(\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right)^n\to 0\ \dots\ \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_m}\right)^n\to 0\right\}$$

(т.к. в силу B))

Теперь найдём max по |I с.з.

i-ая коорд. n-ой итерации имеет вид:

$$x_n^{(i)}=c_1\lambda_1^ne_1^{(i)}+c_2\lambda_2^ne_2^{(i)}+\dots+c_m\lambda_m^ne_m^{(i)}$$

$$x_{n+1}^{(i)}=c_1\lambda_1^{n+1}e_1^{(i)}+c_2\lambda_2^{n+1}e_2^{(i)}+\dots+c_m\lambda_m^{n+1}e_m^{(i)}$$

{поделим $x_{n+1}^{(i)}$ на $x_n^{(i)}$} $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{x_{n+1}^{(i)}}{x_n^{(i)}}=\frac{c_m\lambda_m^{n+1}e_m^{(i)}+\dots+c_1\lambda_1^{n+1}e_1^{(i)}}{c_m\lambda_m^ne_m^{(i)}+\dots+c_1\lambda_1^ne_1^{(i)}}=\left\{\begin{matrix}c_m\neq 0\\ \text{по предп.}\\ C)\end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\lambda_m\neq 0\right\}=\frac{c_m\lambda_m^{n+1}e_m^{(i)}\left(1+\frac{c_{m-1}}{c_m}\left(\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right)^{n+1}\left(\frac{e_{m-1}^{(i)}}{e_m^{(i)}}\right)+\dots+\frac{c_1}{c_m}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_m}\right)^{n+1}\left(\frac{e_1^{(i)}}{e_m^{(i)}}\right)\right)}{c_m\lambda_m^ne_m^{(i)}\left(1+\frac{c_{m-1}}{c_m}\left(\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right)^{n}\left(\frac{e_{m-1}^{(i)}}{e_m^{(i)}}\right)+\dots+\frac{c_1}{c_m}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_m}\right)^{n}\left(\frac{e_1^{(i)}}{e_m^{(i)}}\right)\right)}$$

$$=\lambda_m+O\left(\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right)^n$$

Т.о., $\lambda_m^{(n,i)}=\frac{x_{n+1}^{(i)}}{x_n^{(i)}}=\lambda_m+O\left(\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right)^n$ $\Rightarrow$ сам вычисляем max по мод. с.з. с точ. до малой величины

($\lambda_m^{(n,i)}$: max по мод. с.з., вычисл-е на n-ой итерации по i-ой координате; обозн.)

Итог: если на матрицу A наложить ограничения A), B), C), то это достаточное условие, по степенному методу (2) сходимость приводит по направлению к с.в., отвечающему max по модулю с.з.

Находя отношение $(n+1)$-ой итерации к n-ой можем найти max по модулю с.з.:

$$\lambda_m^{(n)} - \lambda_m = O\left(\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right)^n$$

■

Используя степенной метод

$\{Ax_n = \lambda^n x_n\} \Rightarrow$ $\underbrace{\lambda_m^{(n)}}_{\uparrow \text{max по модулю с.з.}} = \dfrac{(Ax_n, x_n)}{(x_n, x_n)} \uparrow \{x_{n+1} = Ax_n\} = \dfrac{(x_{n+1}, x_n)}{(x_n, x_n)}$

Разделим матрицы на 2 класса:

1. A – самосопряж. $(A = A^*)$
   (даёт лучшую сходимость, чем произвольная)
2. A – произв. операторы

(1) Вспомним, что если $A = A^*$, то у A есть **ОНБ** из собственных векторов:

$$\exists e_1, \dots, e_m = \{e_k\}_1^m : (e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

$$x_n = \sum_{k=1}^m c_k \lambda_k^n e_k \quad \leftarrow \text{разложение по ОНБ}$$

$$x_{n+1} = \sum_{k=1}^m c_k \lambda_k^{n+1} e_k \quad \leftarrow \text{разложение по ОНБ}$$

max по модулю с.зн.

$$\lambda_m^{(n)} = \frac{(x_{n+1}, x_n)}{(x_n, x_n)} = \frac{c_m^2 \lambda_m^{2n+1} + c_{m-1}^2 \lambda_{m-1}^{2n+1} + \dots + c_1^2 \lambda_1^{2n+1}}{c_m^2 \lambda_m^{2n} + c_{m-1}^2 \lambda_{m-1}^{2n} + \dots + c_1^2 \lambda_1^{2n}} =$$

↑ учитывая, что базис ОН

$$= \left\{ \begin{matrix} c_m \neq 0 \\ \text{в силу} \\ \text{предп-ий} \end{matrix} \right\} = \lambda_m \frac{1 + \left(\frac{c_{m-1}}{c_m}\right)^2 \left(\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right)^{2n+1} + \dots + \left(\frac{c_1}{c_m}\right)^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_m}\right)^{2n+1}}{1 + \left(\frac{c_{m-1}}{c_m}\right)^2 \left(\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right)^{2n} + \dots + \left(\frac{c_1}{c_m}\right)^2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_m}\right)^{2n}} =$$

$$= \lambda_m + O\left(\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right)^{2n}$$

?

$\Rightarrow$ получили оценку для самосопр. матриц с.з.

$$\lambda_m^{(n)} - \lambda_m = O\left(\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right)^{2n} \Rightarrow$$

max по модулю с.з.

$\Rightarrow$ для самосопр. матриц получили лучшую точность.

(2) $\exists A$ – произв. матрица (нормальный оператор)

$\Rightarrow \exists \{e_k\}_1^m$ – базис из с.в. матрицы A

Док., что max по модулю с.з., получаемое на n-ой итерации будет отличаться от точного на $O\left(\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right)^n$

$$\lambda_m^{(n)} = \frac{(Ax_n, x_n)}{(x_n, x_n)} = \frac{\sum_{i,j=1}^m c_i c_j \lambda_i \lambda_j^n (e_i, e_j)}{\sum_{i,j=1}^m c_i c_j \lambda_i^n \lambda_j^n (e_i, e_j)} = \dots$$

{ выделим старшую степень $\Rightarrow$ вынесем в числ. в степ. $2n+1$, в зн. в ст. $2n$ }

$$(\text{задача}) = \lambda_m + O\left(\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right)^n$$

$\Rightarrow$ получ. оценку

$$\lambda_m^{(n)} - \lambda_m = O\left(\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m}\right)^n$$

П.о., мы показали, что степенной метод позволяет находить как max по модулю с.з., так и отвеч. ему с.в.

Зам. Если матрица вещественная, то с.з., вообще говоря, могут быть комплексные.

Утв. Если A – вещ., а с.з. – комплексное, то с.в. – комплексные.

Общий $\lambda = \lambda_0 + i\lambda_1$; $\lambda_0, \lambda_1 \in R$ (вещ-е)

$\exists A\mu = \lambda\mu$, $\mu \neq 0$ – с.в.

$\Rightarrow \mu = \mu_0 + i\mu_1$, где μ_0, μ_1 – вещ. вектора $(\mu_1 \neq 0)$

Док-во. Подставим

$$A(\mu_0 + i\mu_1) = (\lambda_0 + i\lambda_1)(\mu_0 + i\mu_1)$$

$\Rightarrow$ { разделим действ. и мнимые части }

$$A\mu_0 = \lambda_0\mu_0 - \lambda_1\mu_1 \qquad A\mu_1 = \mu_0\lambda_1 + \mu_1\lambda_0$$

Пок, что $\mu_1 \neq 0$.
От противного.
$\exists\, \mu_1 = 0$ { зам, что $\lambda_1 \neq 0$ }
$\Rightarrow$ из $A\mu_1 = \mu_0\lambda_1 + \mu_1\lambda_0$ следует
$\mu_0\lambda_1 = \bar{0} \Rightarrow \mu_0 = 0$ (т.к. $\lambda_1 \neq 0$)
$\Rightarrow \mu \equiv 0$ (противоречие) ■

Перейдём к изучению **min** по модулю с.з.
Для этого рассм. **метод обратных итераций (МОИ)**.
$\exists A$ $(m \times m)$
$Ax = \lambda x$, $x \neq 0$

Сделаем теперь допущение, что м-ца A: $\exists A^{-1}$
{ если A - вырождена, то min по мод. с.з. $\in 0$ }
Организуем МОИ по след. правилу
(3) $\boxed{Ax_{n+1} = x_n}$, $n = 0, 1, \ldots$; x_0 - нач. приб.
Метод стал неявным.
Разрешим его отн-но x_{n+1}:
(4) $x_{n+1} = A^{-1}x_n$
Имеем степ. метод для A^{-1}

Зам. Из алгебры: $\lambda_k^A = \frac{1}{\lambda_k^{A^{-1}}}$
$\Rightarrow$ рассм-е (4) как степ. метод, получ., что он будет сх-ся по напр-ю к e_1 — собств. min по || с.з. м-цы A { max по || с.з. м-цы A^{-1} }.

Пусть выполнены усл-я:
A) $\exists$ базис из с.в. $\{e_k\}_1^m$ (м-ца A - простой структуры)
B) $\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right| < 1 \Rightarrow \left|\frac{\lambda_1}{\lambda_m}\right|$ тем более мало
C) $x_0 = c_1e_1 + \ldots + c_me_m$ { разл-е x_0 по баз. из с.в. }
требуем: $c_1 \neq 0$

Покажем, что (4) будет сх-ся по напр-ю к с.в. e_1, отвеч. min по || с.з.

Док-во: Использ. рек. ф-лу (4):
$$x_n = (A^{-1})^n x_0 = \sum_{k=1}^{m} c_k \lambda_k^{-n} e_k =$$
$$= c_1\lambda_1^{-n}e_1 + \ldots + c_m\lambda_m^{-n}e_m \leftarrow \{\text{исп-ем предп. A)} \Rightarrow \text{разл. } x_0 \text{ по базису}\}$$
$$\Rightarrow \frac{\lambda_1^n}{c_1}x_n = e_1 + \frac{c_2}{c_1}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n e_2 + \ldots + \frac{c_m}{c_1}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_m}\right)^n e_m$$
{ предп. C) } { устрем. $n \to \infty \Rightarrow \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n \to 0 \ldots \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_m}\right)^n \to 0$ }
$\Rightarrow$ по направлению $x_n \to e_1$ — с.в., отв. min по || с.з. м-цы A

Задача 1. Пок, что
$$\lambda_1^{(n)} = \frac{x_n^{(i)}}{x_{n+1}^{(i)}} = \lambda_1 + O\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n$$
{ аналог. степ. методу }

Задача 2.
$$\lambda_1^{(n)} = \frac{(x_n, x_n)}{(x_{n+1}, x_n)} = \lambda_1 + O\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n$$
{ пок, что λ_1 можно найти ч/з скал. произв.; для самосопр. $\Rightarrow O\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{2n}$ }

Т.о. Метод обр. ит. позвол. найти min по || с.з. невыр. м-цы.

Степ. мет. позволяет найти и другие с.з. (не только max и min)
Рассм. **метод обр. итераций со сдвигом**
Он позволяет находить промеж-е с.зн-я.
Его удобно записать в виде
(5) $\boxed{(A - \alpha E)x_{n+1} = x_n}$, $n = 0, 1, \ldots$, x_0 - задан., $\alpha \in R$
$\Rightarrow$ (510) неявная функция $\Rightarrow \exists\, (A - \alpha E)^{-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow x_{n+1} = (A - \alpha E)^{-1}x_n$ (6)

Обозн-я $B = (A-\alpha E)^{-1}$ снова. Имеем степ. метод. Он будет сх-ся к ℓ_ℓ:

$x_n \to e_\ell$,

где ℓ – номер: $\frac{1}{|\lambda_\ell - \alpha|} = \max_k \frac{1}{|\lambda_k - \alpha|}$

(т.е. λ_ℓ – наиб. близкое к α с.з. м-цы A)

Зам. Надо помнить, что $(A-\alpha E)$ близка к вырожд., т.к. заказчик говорит, что искомое с.з. близко к α.

$\Rightarrow \lambda_\ell^{(n)} = \alpha + \frac{x_n^{(i)}}{x_{n+1}^{(i)}}$ { т.к. $(\lambda_\ell - \alpha)$ – min по мод. с.з. м-цы $(A-\lambda E)$ }

09.03.
Лекция 8.

Часто при реш-ии задач необх. найти весь спектр с.зн.
Мы будем изучать сам. совр. QR-алгоритм.

§10. Приведение матрицы к верхней почти треугольной форме (ВПТФ).

Зад. на с.з.

(1) $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$

Если бы нам удалось свести A к C, где C – имеет предельную форму, то весь спектр легко найти.

$A \to C$

↳ сводить по ист. Гаус. сложно и при этом теряется спектр исх. задачи ↲

(2) Если $C = Q^{-1}AQ$ – т.е. перейти от A к C с помощью преобраз. подобия.

Это можно сделать численно (аналит-ки нельзя).

58

Если мы от A к C перех. с пом. преобраз. подобия, то спектр с.зн-ий сохр-ся.

Если Q – ортог-я (унит-я) м-ца, то также сохраняется и симметрия.

Наш подход основан на элем. отражениях (Хаус-Холдера).

$\exists A(m \times m)$

рассм. пр-во т-мерн. векторов

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \neq 0$

Опр. Элем-ми отражениями, соотв-ми данному вект v, наз-ся преобразование, зад-е м-цей

$$H = E - 2\frac{vv^T}{\|v\|^2} \qquad (3)$$

$v^T v = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_m^2 = \|v\|^2$

$v \cdot v^T = \begin{pmatrix} v_1^2 & v_1 v_2 & \cdots & v_1 v_m \\ v_2 v_1 & v_2^2 & \cdots & v_2 v_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_m v_1 & v_m v_2 & \cdots & v_m^2 \end{pmatrix} \Rightarrow H(m \times m)$

Рассм. св-ва м-цы H:

1) vv^T – симметрична $\Rightarrow$ H – симм-я $\Rightarrow$ $\Rightarrow H = H^T$

2) H – ортогональная м-ца

Опр. Q – ор-я м-ца, если $Q^T = Q^{-1}$

Опр. Q – унит-я, если $Q^* = Q^{-1}$

(аналог в компл. пр-ве)

Док-во

$H^T \cdot H \underset{\text{св. 1}}{=} H^2 = \left(E - 2\frac{vv^T}{\|v\|^2}\right)\left(E - 2\frac{vv^T}{\|v\|^2}\right) =$

$$= E - 4\frac{vv^T}{\|v\|^2} + 4\frac{v(v^Tv)v^T}{\|v\|^4} = \{\text{нет-е ассоц-ти произв. м-ц}\} =$$

$$= \{\text{т.к. } v^Tv = \|v\|^2\} =$$

$$= E - 4\frac{vv^T}{\|v\|^2} + 4\frac{vv^T}{\|v\|^2} = E$$

$$\Rightarrow \{H^{-1}H = E\} \Rightarrow H^T = H^{-1} \text{ — о/г}$$

Утв. (3 св-ва)

∃ задан произв. вектор-столбец $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)^T$

$\Rightarrow$ можно выбрать вектор v:

$$Hx = \begin{pmatrix} -\|x\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ где } \|x\| = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right)^{1/2}$$

(можем подавить все компоненты кроме первой)

Док-во

Будем искать v в виде:

$$v = x + \sigma z, \quad z = (1, 0, 0, \dots, 0)^T, \ \sigma > 0 \text{ — конст.}$$

Док., что $Hx = \begin{pmatrix} -\|x\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$$Hx = x - 2\frac{(x+\sigma z)(x+\sigma z)^T}{(x+\sigma z)^T(x+\sigma z)}x =$$

($(x+\sigma z)^T(x+\sigma z) = \|v\|^2$)

$$= x - (x+\sigma z)\frac{2(x+\sigma z)^T x}{(x+\sigma z)^T(x+\sigma z)} = \{\text{нет. св-ва скал. произв-я}\} = (*)$$

$$2(x+\sigma z)^T x = 2\|x\|^2 + 2\sigma x_1$$

$$(x+\sigma z)^T(x+\sigma z) = \|x\|^2 + \sigma x_1 + \sigma x_1 + \sigma^2 \cdot 1$$

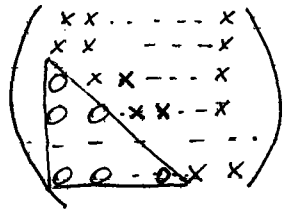
Возьмём $\sigma = \|x\| \Rightarrow$

числитель совп. со ск-ным и будет равен $2\|x\|^2 + 2\|x\|x_1$

$\Rightarrow$ дробь $= 1$

$$\Rightarrow (*) = x - x - \sigma z = \begin{pmatrix} -\|x\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \blacksquare$$

Опр. **ВПТФ** — м-ца, кот. имеет вид



X — некот. эл-ты ↓ они заполн. верхний Δ и ниже. побочную диаг-ль

$$(C)_{ij} = 0, \quad i \geq j+2.$$

Показ, что ∀ м-цу, исп-я св-ва 1)-3), сводим свести к ВПТФ.

Конечно из неё сразу нельзя взять с. зн-ия.

Но помощью сводим перейти к итерац. методу.

М-цу A запишем в блочном виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & y_{m-1} \\ x_{m-1} & A_{m-1} \end{pmatrix}, \text{ где}$$

$x_{m-1} = (a_{21}, a_{31}, \dots, a_{m1})^T$ — столбец

$y_{m-1} = (a_{12}, a_{13}, \dots, a_{1m})$ — строка

Замеч. Невырожденность A не предполагается.

По св. 3) $\Rightarrow \underbrace{H x_{m-1}}_{m-1} = \begin{pmatrix} -\|x_{m-1}\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = -\sigma_1 z_{m-1}$ (обозн.) где $\sigma_1 = \|x_{m-1}\|$, где

$$\|x_{m-1}\| = \left(\sum_{i=2}^{m} a_{i1}^2\right)^{1/2} \quad \{H(m-1, m-1) \text{ порядок}\}$$

Обозн.

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0_{12} \\ 0_{21} & H_{m-1} \end{pmatrix} \in R^{m \times m}$$

Св-ва U_1:

1) $U_1 = U_1^T \Rightarrow U_1$ — симм.

2) U_1 – ортогональна $(U_1^T = U_1^{-1})$

$$U_1^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0_{12} \\ 0_{21} & H_{m-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0_{12} \\ 0_{21} & H_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0_{12} \\ 0_{21} & H_{m-1}^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \{\text{св-ва } H_{m-1} \text{ 1)-3)}\} = E$$

$$\Rightarrow U_1^T = U_1^{-1} \Rightarrow U - \text{о/г}$$

Умножим U_1^{-1} слева на A:

$$U_1^{-1}A = \begin{pmatrix} 1 & 0_{12} \\ 0_{21} & H_{m-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & y_{m-1} \\ x_{m-1} & A_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & y_{m-1} \\ H_{m-1}x_{m-1} & H_{m-1}A_{m-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & y_{m-1} \\ -\sigma_1 z_{m-1} & H_{m-1}^{-1}A_{m-1} \end{pmatrix}$$

Теперь получ-ю м-цу справа умн. на U_1:

$$\underset{\text{обозн.}}{C_1} = U_1^{-1}AU_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & y_{m-1} \\ -\sigma_1 z_{m-1} & H_{m-1}^{-1}A_{m-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0_{12} \\ 0_{21} & H_{m-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & y_{m-1}H_{m-1} \\ -\sigma_1 z_{m-1} & H_{m-1}^{-1}AH_{m-1} \end{pmatrix} = \underset{\text{структура}}{\begin{pmatrix} \times & \times \\ \times & \times \\ 0 & \times \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \times \end{pmatrix}},$$

где $\times = C_{ij}^{(1)} \neq 0$ (после 1-го шага)

Т.о., C_1 из A получ-ся с помощью преобр-ий подобия.

Далее рассм. вектор

$$x_{m-2} = (C_{32}^{(1)}, C_{42}^{(1)}, \dots, C_{m2}^{(1)})^T$$

По св. 3) можно выбр. v:

$$H_{m-2}x_{m-2} = -\sigma_2 z_{m-2} = (-\|x_{m-2}\|, 0, \dots, 0)^T$$

М-цу U_2 предст. в виде:

$$U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & H_{m-2} \end{pmatrix} : \quad 1)\ U_2 = U_2^T \Rightarrow U_2 - \text{симм}$$

$$2)\ U_2 - \text{о/г } (U_2^T = U_2^{-1})$$

Получим м-цу $C_2 = U_2^{-1}C_1U_2 =$ (структура)

$$= \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix}$$

C_2 можно запис. в виде:

$$C_2 = U_2^{-1}\overbrace{U_1^{-1}AU_1}^{C_1}U_2$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$\Rightarrow$ через $(m-2)$ шага получим м-цу C:

$$C = U_{m-2}^{-1}U_{m-3}^{-1}\dots U_2^{-1}U_1^{-1}AU_1U_2\dots U_{m-2}$$

Эта м-ца будет иметь **ВПТФ**. Нам важно будет ее это преобр. подобия.

Обозн.

$$U = U_1U_2\dots U_{m-2}$$

$$U^{-1} = (U_1\cdots U_{m-2})^{-1} = \quad U_i - \text{о/г } \forall i = \overline{1,m-2}$$

$$= U_{m-2}^{-1}\cdots U_1^{-1} = U_{m-2}^T\cdots U_1^T =$$

$$= (U_1\cdots U_{m-2})^T = U^T$$

$\Rightarrow$ м-ца U – о/г $\{U^{-1} = U^T\}$

$\Rightarrow$ м-ца C получена из A с помощью преобр. подобия с о/г м-цей U.

$$\boxed{C = U^{-1}AU}$$

$\Rightarrow$ $\forall$ м-цу можно свести к ВПТФ с помощью преобр. подобия. ■

Зам 1 если $C = U^{-1}AU$ (U – о/г) $\Rightarrow \lambda_A = \lambda_C$

Т.е. при переходе от A к C с помощью преобр-ий подобия спектр с.з. сохраняется.

Док-во

$\exists\ Ax = \lambda x,\ x \neq 0$

$U^{-1}Ax = \lambda U^{-1}x$

Обозн. $U^{-1}x \overset{df}{=} y \Rightarrow x = Uy$

$\Rightarrow U^{-1}AUy = \lambda y \Rightarrow Cy = \lambda y,\ y \neq 0$

$\Rightarrow$ при преобразовании подобия спектр с.ч-ий сохр-ся ■

Зам 2 Преобр подобия с о/г м-цей сохраняет симметрию, т.е. если $A = A^T \Rightarrow C = C^T$

Док-во $C = U^{-1}AU$

$C^T = (U^{-1}AU)^T = U^TA^T(U^{-1})^T = U^{-1}AU = C$ ■

Т.о., при преобр-ии подобия C получается трёхдиагональная

§11. Понятие о QR-алгоритме. Решение полной проблемы собственных значений.

Реш. полн. пробл. с.ч-ий с пом. итерац. метода. $Ax = \lambda x,\ x \neq 0$ (1)

Факт: $\forall$ м-цу A можно предст. в виде: $A = QR$, (2)

где Q – ортог-я ($Q^T = Q^{-1}$),

$R = \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ & \ddots & \\ 0 & & \times \end{pmatrix}$ – верхние треуг-я

Покажем, что QR-разложение возможно для любой матрицы.

$\exists\ x = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1})^T$ – 1-ый столбец м-цы A; по этому вект можно построить вектор $v = x + \|x\| z$;

$H_1 = E - 2\frac{vv^T}{\|v\|^2}$: $H_1 x = \begin{pmatrix} -\|x\| \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Перейдём H_1 слева на A:

$H_1 A = \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \times & \times \end{pmatrix}$ – структура.

Далее берём вектор длины $(m-1)$. Для него $\exists$

$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}$ $\rightarrow (m-1, m-1)$

$\Rightarrow H_2 H_1 A = \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix}$

$\dots \Rightarrow$ после $(m-1)$ шага

$H_{m-1} H_{m-2} \cdots H_2 H_1 A = \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ & \ddots & \\ 0 & & \times \end{pmatrix} = R$ – верхн. треуг. м-ца

Док. теперь, что Q – ортогональная.

Рассм. м-цу Q:

$$Q = H_1 H_2 \cdots H_{m-1}$$

$$Q^{-1} = H_{m-1}^{-1} \cdots H_2^{-1} H_1^{-1} = \{\text{т.к. } H_i \text{ – симм., орт.}\}$$

$$= H_{m-1}^T \cdots H_2^T H_1^T = (H_1 H_2 \cdots H_{m-1})^T = Q^T$$

$\Rightarrow Q$ – о/г м-ца. ■

← Было $H_{m-1} \cdots H_1 A = R \overset{H_i = H_i^{-1}}{\Rightarrow} Q^{-1} A = R \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{A = QR}$$

Зам. Если делать QR – разл. прям. м-цы, то надо $O(m^3)$ действий.
Если A – ВПТФ $\Rightarrow O(m^2)$,
если A – трёхдиаг $\Rightarrow O(m)$

Зам. QR – алг-м – хорошей и нет хорошего д-ва его сх-ти
{ Введрин и Выч. основы ЛА } или Уилкинсон

] A_0 – м-ца;
её можно разложить

(3) $A_0 = Q_0 R_0$, где $Q_0^{-1} = Q_0^T$, R_0 – ВТФ

(4)] $A_1 \overset{df}{=} R_0 Q_0$

Из (3) $\Rightarrow R_0 = Q_0^{-1} A \Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$

$\Rightarrow A_1 = Q_0^{-1} A_0 Q_0 \Rightarrow$ спектр. $\overset{\text{с.з.}}{\text{у}}$ м-ц A_0 и A_1 одинак-ий (т.к. они подобны и Q_0 – о/г)

A_1 также можно разл-ть. $\overset{df}{}$

$$A_1 = Q_1 R_1, \quad A_2 = R_1 Q_1$$

- - - - - - -

$$A_k = Q_k R_k$$

(5)

$$A_{k+1} \overset{df}{=} R_k Q_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

(6)

// A_0 – исходная матрица.

Куда же будет сх-ся этот ит. мет?

$(k \to \infty)$

- $A_k \approx \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \times \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m \end{pmatrix}$, если λ_i – вещ-е
- $A_k \approx$ (будет стремиться) $\begin{pmatrix} \times & \cdots & \times \\ & \begin{matrix} \times & \times \\ \times & \times \end{matrix} \; \begin{matrix} \leftarrow \mathrm{Re}\lambda \\ \leftarrow \mathrm{Im}\lambda \end{matrix} & \\ 0 & & \ddots \end{pmatrix}$, если λ_i – комплексные

Мы будем выходить из итераций, когда числа будут удовл. зад-ой степени точности.
Т.о, QR-алг – симм. с т.з. проб. с.з. метод.
Недостаток – надо держать в памяти всю матрицу.

На кажд. итер. надо делать разлож-е вида (5)–(6).

Если A – прям $\Rightarrow O(m^3)$;
A – ВПТФ $\Rightarrow O(m^2)$,
A – трёхдиаг-я $\Rightarrow O(m)$ действий.
(на каждом шаге QR-алг-ма)

Хотелось бы, чтобы изначально A_0 была попроще.
В пред. § мы пок, что A м-цу можно свести к ВПТФ.
Т.е. прям. м-цу сначала сделаем ВПТ, а потом начнём процесс.

10.03.04.
Лекция 9.

Очень важно, что QR-алгоритм такой, что он не ухудшает ВПТФ.
Откуда это следует?
Сейчас докажем две леммы.
Т.о., при каждом ⊛ будем осуществлять $O(m^2)$ действий.
К тому же, если м-ца сложная, то ВПТФ будет давать предсказательную.
Это вообще хорошо.

§12. Предварительное преобразование матрицы к ВПТФ. Неухудшение ВПТФ при QR-алгоритме.

$\exists A\ (m\times m)$
QR-алгоритм:

(1) $A_k = Q_k R_k$
(2) $A_{k+1} \overset{\text{def}}{=} R_k Q_k$, $k = 0,1,2,\ldots$

Сначала м-цу A сводим к м-це A_0, имеющей ВПТФ
(с пом. преобраз. подобия $\Rightarrow$ спектр при этом сохр-ся)

$A_{k+1} = Q_k^{-1} A_k Q_k$

Если мы привели м-цу к ВПТФ, то при QR-ал. она неухудш.

Лемма 1. $\exists A, B$ – кв. м-цы т-го порядка, $\exists B$ – верхн. треуг. форма (ВТФ), A – ВПТФ
(3) $\Rightarrow C = BA$ – ВПТФ

Док-во Распишем поэлементно

$$c_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{m} b_{i\alpha} a_{\alpha j} \circledcirc$$

Учтём вид м-цы B: $b_{i\alpha} = 0$, $i > \alpha$ $\Rightarrow$

$$\circledcirc \sum_{\alpha=i}^{m} b_{i\alpha} a_{\alpha j} \circledcirc$$

Учтём вид м-цы A: $a_{\alpha j} = 0$, $\alpha > j+1$ $\Rightarrow$

$$\circledcirc \sum_{\alpha=i}^{j+1} b_{i\alpha} a_{\alpha j}$$

Док, что $c_{ij} = 0$ при $i > j+1$
(т.к. верх. предел суммир-я < чем нижний)
$\Rightarrow C$ – ВПТФ ■

Лемма 2. $\exists A, B\ (m\times m)$: B – ВПТФ, A – ВТФ
$\Rightarrow C = BA$ – ВПТФ.

Док-во (аналогично)

Пок. с пом-ю этих лемм, что QR-ал. не ухудш. ВПТФ.

Процесс начнётся с $A_0 = Q_0 R_0$ (A_0 – ВПТФ).
$\Rightarrow Q_0 = A_0 R_0^{-1}$ (A_0 – ВПТФ, R_0^{-1} – ВТФ) $\Rightarrow$ (лемма 2) Q_0 – ВПТФ

Далее. $A_1 \overset{\text{def}}{=} R_0 Q_0 \Rightarrow$ (ВТФ, ВПТФ, лемма 1) A_1 – ВПТФ

...

$\Rightarrow A_k$ – ВПТФ, A_{k+1} – ВПТФ

Глава II. Интерполирование и приближение функций.

§1. Постановка задачи интерполирования

$\exists\ a \le x \le b$ — отрезок.
Разбиваем его узлами:
$$a \le x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n \le b$$
$\{x_i\}_0^n$ — $(n+1)$ узел

$\exists$ в узлах задано зн-е фции
$f(x_i) = f_i$, $i = \overline{0,n}$
А нам надо построить такое приближение, кот. в этих узлах будет совп. с f_i, а между ними будет приближать иск. фцию.
Задача эта имеет бесконечно много решений.

Мы будем приближать алг-ми полиномами n-ой степени:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, \quad a_n \neq 0. \tag{1}$$

Если искать его так, чтобы
$$P_n(x_i) = f_i, \quad i = \overline{0,n} \tag{2}$$
то говорят, что $P_n(x)$ — это **интерполяц. полином, построенный по узлам x_i, для фции $f(x)$.**

Покажем, что реш-е зад. прибл-я алг-ми пол-ми $\exists!$.
Для нахож-я a_i имеем систему:
$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n = f_0 \\ a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n = f_1 \\ \dots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n = f_n \end{cases} \tag{3}$$

Мы знаем, что сист. лин. алг. ур. определена, когда число ур. $\Leftrightarrow$ числу неизв-х.
Вычислим определитель:
$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \dots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{n \ge i > j \ge 1} (x_i - x_j) \neq 0,$$
т.к. $x_i \neq x_j$ $\Rightarrow$
(опр-ль Вандермонда)

$\Rightarrow$ система определенная $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ набор коэфов a_i единственен.

На 2-ом курсе мы получали интерпол. фцию Лагранжа.
Сейчас получим — и — Ньютона.
Иногда удобна одна, иногда другая форма.

§2. Интерполяционная формула Лагранжа ($L_n(x)$).

Задача: есть отрезок $a \le x \le b$
есть узлы разбиения
$$a \le x_0 < x_1 < \dots < x_n \le b \qquad \{x_i\}_0^n - (n+1) \text{ узел}$$
и в них задано зн-е приближаемой фции $f(x_i) = f_i$, $i = \overline{0,n}$

Ищем полином в виде
$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k(x) f(x_k), \tag{1}$$
где $c_k(x)$ — алг-ие n-ой степени.
Такая форма инт. мн-на наз. **формой Лагранжа**.

c_k ищем из усл-ия: $L_n(x_i) = f_i$, $i = \overline{0,n}$
$c_k(x)$ ищем в виде:
$$c_k(x) = \lambda_k (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)$$

Вводится многочлен

$w(x) \overset{df}{=} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$ — $(n+1)$-ой степени

Запишем его в виде

$w(x) = (x - x_k)[\dots]$

$\Rightarrow w'(x) = [\dots] + (x - x_k)[\dots]'$

$\Rightarrow w'(x_k) = (x_k - x_0)(x_k - x_1) \cdots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \cdots (x_k - x_n)$

$\Rightarrow c_k(x)$ запишем в след. виде:

$$c_k(x) = \frac{w(x)}{(x - x_k)\, w'(x_k)}$$ — осн-к n-ой степени

$\Rightarrow L_n(x)$ имеет вид:

$$\boxed{L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{w(x)}{(x - x_k) w'(x_k)} f(x_k)}$$ — полином Лагранжа.

Какова погрешность пол. ст.?

$\psi_{L_n}(x) = f(x) - L_n(x)$ — погр-ть инт. ф-лы Лагр.

Ясно, что $\psi_{L_n}(x_i) = 0$, $i = \overline{0,n}$

Введём функцию

$g(s) = f(s) - L_n(s) - k w(s)$,

k ищется из усл-ия $g(x) = 0$, $x \in [a,b]$

Получаем оценку погр-ти инт. пол. Лагр.:

$$\psi_{L_n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w(x), \quad \xi \in [a,b]$$

обозн. $M_{n+1} \overset{df}{=} \sup_{x \in [a,b]} |f^{(n+1)}(x)| \Rightarrow |\psi_{L_n}(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |w(x)|$

В этой оц. заложен очень коварный факт. Казалось бы, что при $n \to \infty$, погр-ть $\to 0$. Это не так.

ex. (Калиткин и "Чем" — прибл-ся неогр. возр. $\Rightarrow$ сх-ти нет)

Не надо стремиться брать n большим, а надо иметь сплайны.

Посл. оц. пок-ет, что если ст-ь прибл. ф-ии степ. $\le n$, то пол-ном Лагр. ею прибл-ем точно.

§3. Разделённые разности.

$\exists\, x \in [a,b]$ — отрезок

$a \le x_0 < x_1 < \dots < x_N \le b$ — узлы разбиения $\{x_i\}_0^N$

В узлах зад. ф-е функц.:

$f(x_i) = f_i$, $i = \overline{0,N}$

Опр. Разд-ой разностью 1-го порядка, постр-ой по узлам x_i, x_j, наз-я отношение

$$f(x_i, x_j) = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{x_j - x_i}, \quad i, j = \overline{0,N}, \ i \ne j$$

Почти всегда рассм-ся соседние узлы.

Это дискретный аналог 1-ой производной.

$\Rightarrow f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$,

$f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Разд. разн. 2-го пор., постр. по узлам x_0, x_1, x_2:

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}$$

Есть разд-е разности k-го порядка: $f(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k})$, $i,j = \overline{0,N}$, $i \neq j$ и $f(x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_{j+k+1})$

$\Rightarrow$ разд. разн-ю $(k+1)$ пор, постр. по узлам $x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k+1}$:

$$f(x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k+1}) = \frac{f(x_{j+1}, \dots, x_{j+k+1}) - f(x_j, \dots, x_{j+k})}{x_{j+k+1} - x_j}$$

Инт. фла Ньют. будет вып-ся т/ж разд-е разности $(n+1)$-го порядка.

Введём фию

$$\omega_{0,n}(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_n) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

$$\omega_{\alpha,\beta}(x) = (x-x_\alpha)(x-x_{\alpha+1})\cdots(x-x_\beta) = \prod_{j=\alpha}^{\beta}(x-x_j),$$

Найдём ее произв-ю в узлах: $\alpha = \overline{0,\beta}$, $\beta = \overline{0,N}$

$$\omega'_{\alpha\beta}(x_i) = \prod_{\substack{j=\alpha \\ j\neq i}}^{\beta}(x_i - x_j)$$ } вывод аналогичен

Утв. Разд-е разность k-го порядка может быть представлена в след-м виде:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=0}^{k} \frac{f(x_i)}{\omega'_{0,k}(x_i)} \quad (1)$$

} вып-е т/ж знач-ия фции в узлах и зн-ие произв. полинома

Док-во

По индукции (по k)

$k=1$

$$f(x_0, x_1) \overset{dt}{=} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} = \frac{f(x_0)}{x_0-x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1-x_0}$$

$\Rightarrow$ при $k=1$ фла верна

Пусть для $k=\ell$ фла верна

$$\Rightarrow f(x_0, x_1, \dots, x_\ell) = \sum_{i=0}^{\ell} \frac{f(x_i)}{\omega'_{0,\ell}(x_i)}$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{\ell+1}) = \sum_{i=1}^{\ell+1} \frac{f(x_i)}{\omega'_{1,\ell+1}(x_i)}$$

— разделённые разн-ти порядка ℓ

Разд. разн. $(\ell+1)$-го пор:

$$f(x_0, x_1, \dots, x_{\ell+1}) \overset{dt}{=} \frac{1}{x_{\ell+1}-x_0}\left(f(x_1, \dots, x_{\ell+1}) - f(x_0, \dots, x_\ell)\right) =$$

$$= \frac{1}{x_{\ell+1}-x_0}\left(\sum_{i=1}^{\ell+1}\frac{f(x_i)}{\omega'_{1,\ell+1}(x_i)} - \sum_{i=0}^{\ell}\frac{f(x_i)}{\omega'_{0,\ell}(x_i)}\right) =$$

$$= \frac{1}{x_{\ell+1}-x_0}\left(\frac{f(x_{\ell+1})}{\omega'_{1,\ell+1}(x_{\ell+1})} - \frac{f(x_0)}{\omega'_{0,\ell}(x_0)} + \sum_{i=1}^{\ell}\left(\frac{f(x_i)}{\omega'_{1,\ell+1}(x_i)} - \frac{f(x_i)}{\omega'_{0,\ell}(x_i)}\right)\right)$$

$$= \left\{\begin{array}{l}(x_{\ell+1}-x_0)\,\omega'_{1,\ell+1}(x_{\ell+1}) = \omega'_{0,\ell+1}(x_{\ell+1}) \\ (x_{\ell+1}-x_0)\,\omega'_{0,\ell}(x_0) = -\omega'_{0,\ell+1}(x_0)\end{array}\right\} =$$

$$\frac{1}{x_{\ell+1}-x_0}\sum_{i=1}^{\ell}\left(\frac{f(x_i)}{\omega'_{1,\ell+1}(x_i)} - \frac{f(x_i)}{\omega'_{0,\ell}(x_i)}\right) = \frac{1}{x_{\ell+1}-x_0}\sum_{i=1}^{\ell} f(x_i)\left(\frac{(x_i-x_0)}{\omega'_{1,\ell+1}(x_i)(x_i-x_0)} - \frac{(x_i-x_{\ell+1})}{\omega'_{0,\ell}(x_i)(x_i-x_{\ell+1})}\right) = \sum_{i=1}^{\ell}\frac{f(x_i)}{\omega'_{0,\ell+1}(x_i)}$$

$$= \frac{f(x_0)}{\omega'_{0,\ell+1}(x_0)} + \frac{f(x_{\ell+1})}{\omega'_{0,\ell+1}(x_{\ell+1})} + \sum_{i=1}^{\ell}\frac{f(x_i)}{\omega'_{0,\ell+1}(x_i)} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\ell+1}\frac{f(x_i)}{\omega'_{0,\ell+1}(x_i)} \quad \blacksquare$$

Попытаемся выразить $f(x_k)$ т/з $f(0)$ и разд-е разности до k-го порядка.

$k=1$

$$f(x_0,x_1) \overset{(1)}{=} \frac{f(x_0)}{x_0-x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1-x_0} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ {домнож. на x_1-x_0} $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{f(x_1) = f(x_0) + (x_1-x_0) f(x_0,x_1)}$$

$k=2$

$$f(x_0,x_1,x_2) \overset{(1)}{=} \frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} +$$

$$+ \frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \Rightarrow \{\text{домн. на } (x_2-x_0)(x_2-x_1)\}$$

$$\Rightarrow (x_2-x_0)(x_2-x_1) f(x_0,x_1,x_2) = \underbrace{\frac{-f(x_0)(x_2-x_1)}{(x_0-x_1)}}_{\alpha} -$$

$$- \frac{f(x_1)(x_2-x_0)}{x_1-x_0} + f(x_2) \Rightarrow \{\text{подст. вместо } f(x_2) \text{ его выр.}\}$$

(2)

$$\frac{f(x_1)(x_1-x_0)}{x_1-x_0} = \frac{(x_2-x_0)f(x_0) + (x_2-x_0)(x_1-x_0)f(x_0,x_1)}{x_1-x_0} =$$

$$= \underbrace{\frac{(x_2-x_0)f(x_0)}{x_1-x_0}}_{-\beta} + (x_2-x_0) f(x_0,x_1)$$

$$\alpha+\beta = -\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}(x_2-x_1-x_2+x_0) = -f(x_0)$$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} f(x_2) = f(x_0) + (x_2-x_0) f(x_0,x_1) +$$

$$+ (x_2-x_0)(x_2-x_1) f(x_0,x_1,x_2)$$

. . . . . .

метод полной мат. инд. по k даёт:

(3)

$$f(x_k) = f(x_0) + (x_k-x_0) f(x_0,x_1) + (x_k-x_0)(x_k-x_1) f(x_0,x_1,x_2) +$$

$$+ \dots + (x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1}) f(x_0,\dots,x_k)$$

§4. Интерполяционная формула Ньютона.

$x \in [a,b]$ – отрезок

$a \le x_0 < x_1 < \dots < x_n \le b$

$\{x_i\}_0^n$ – узлы разбиения

задано $f(x_i) = f_i$, $i=\overline{0,n}$

Строим приближ.-ый полином в след. виде:

$$N_n(x) = f(x_0) + (x-x_0) f(x_0,x_1) + (x-x_0)(x-x_1) f(x_0,x_1,x_2) + \dots +$$

$$+ (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1}) f(x_0,\dots,x_n) \quad (1)$$

интерполяционный полином n-ой степ.

требуем $N_n(x_i) = f(x_i)$, $i=\overline{1,n}$

$$\Rightarrow N_n(x_i) = f(x_0) + (x_i-x_0) f(x_0,x_1) +$$

$$+ (x_i-x_0)(x_i-x_1) f(x_0,x_1,x_2) + \dots +$$

$$+ (x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1}) f(x_0,x_1,\dots,x_i) \overset{(2)}{=} f(x_i), \quad i=\overline{0,n}$$

$\Rightarrow$ $N_n(x)$ ам. ин-и левых интерп. полиномов; он наз-ся инт. пол-ном Ньютона.

Этот ИМ единственен; он совп. с ИМ Лагранжа – это просто другая форма записи $\Rightarrow$ погреш-ть та же. Зачем же он нужен?

Зам. Область применимости ИП Ньют. и сл. разная.

Если интересует одну точку и хотим получить её значение в большом числе узлов, то Ф-ла Ньют. очень эффект-на.

Если же узлы зафиксированы, но меняется ф-ция, то эффективна инт. ф-ла Лагранжа.

Погрешность ИФ Ньютона

$$\psi_{N_n}(x) \overset{df}{=} f(x) - N_n(x)$$

надо делать ограничение на гладкость f
$\Rightarrow \exists f$ – достаточно гладка ($\exists f^{(n+1)}(\xi)$)

Обозн. $M_{n+1} = \sup_x |f^{(n+1)}(x)|$

$$\Rightarrow \boxed{|\psi_{N_n}(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |w(x)|}$$

§5. Интерполирование с кратными узлами. Интерполяционная формула Эрмита.

$\exists x \in [a,b]$ – отрезок

(1) Узлы: $x_0\ x_1 \cdots x_m$ – $(m+1)$ узел

(1) В узлах задано: $f(x_0)\ f(x_1) \cdots f(x_m)$ – значение ф-ции и производные до опред-го порядка:

(1) $f^{(\alpha_0-1)}(x_0)\quad f^{(\alpha_1-1)}(x_1) - - - - \cdot f^{(\alpha_m-1)}(x_m)$, $\alpha_i \in N$, $i=\overline{0,m}$

Надо постр. полином, у кот. зн-я в узлах совп. со зн-ми ф-ции в узлах и зн-ия производных в узлах совп. со зн-ми произв. ф-ции строим в узлах.

(2) $H_n(x)$: $H_n^{(i)}(x_k) = f^{(i)}(x_k)$, $k=\overline{0,m}$, $i=\overline{0,(\alpha_k-1)}$

полином n-ой степ.

$\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_m = (n)+1$ (полином строим по $(n+1)$-ому данному) (*) 78

Полином $H_n(x)$ будем искать в виде:

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{i=0}^{\alpha_k-1} C_{k,i}(x) f^{(i)}(x_k), \quad (3)$$

где $C_{k,i}(x)$ – многочлен n-ой степ.

Замеч. Если (*) вып., то $H_n(x)$ $\exists!$

Будем строить ИП Эрмита по 3-м узлам, у кот-х средний будет кратным.

x_0 x_1 x_2 – узлы
$f(x_0)$ $f(x_1)$ $f(x_2)$
$f'(x_1)$

Можем построить $H_3(x)$:

$$H_3(x_0) = f(x_0);$$
$$H_3(x_1) = f(x_1);\ H_3'(x_1) = f'(x_1);$$
$$H_3(x_2) = f(x_2)$$

Будем искать ИП в виде:

$$H_3(x) = C_0(x)f(x_0) + C_1(x)f(x_1) + C_2(x)f(x_2) + B_1(x)f'(x_1), \quad (4)$$

где $C_0(x), C_1(x), C_2(x), B_1(x)$ – многочлены 3-ей степени

Коэф-ты:

$C_0(x_0)=1$,	$C_1(x_0)=0$	$C_2(x_0)=0$	$B_1(x_0)=0$
$C_0(x_1)=0$,	$C_1(x_1)=1$	$C_2(x_1)=0$	$B_1(x_1)=0$
$C_0(x_2)=0$,	$C_1(x_2)=0$	$C_2(x_2)=1$	$B_1(x_2)=0$
$C_0'(x_1)=0$	$C_1'(x_1)=0$	$C_2'(x_1)=0$	$B_1'(x_1)=1$

Если эти усл-ия выполнены $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ полином интерп-ый.

$C_0(x) = K(x-x_1)^2(x-x_2)$ — будем искать в виде (учит. кр-ть нулей)

$\Rightarrow$ (учит. кр-ть нулей) $C_0(x_0)=1 \Rightarrow C_0(x_0) = K(x_0-x_1)^2(x_0-x_2)=1$

$\Rightarrow C_0(x) = \dfrac{(x-x_1)^2(x-x_2)}{(x_0-x_1)^2(x_0-x_2)}$

$C_2(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)^2}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)^2}$

$C_1(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$

$C_1(x) = (x-x_0)(x-x_2)(ax+b)$

$C_1(x_1)=1 = (x_1-x_0)(x_1-x_2)(ax_1+b) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{ax_1+b} = \dfrac{1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}$

$C_1'(x) = (x-x_0)(x-x_2)a + (ax+b)(2x-x_0-x_2)$

$\Rightarrow$ (т.к. $C_1'(x_1)=0$) $\Rightarrow 0 = (x_1-x_0)(x_1-x_2)a + \underline{(ax_1+b)}(2x_1-x_0-x_2)$

$\Rightarrow$ (подст. ax_1+b) $\Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = (x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdot a + \dfrac{2x_1-x_0-x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = -\dfrac{2x_1-x_0-x_2}{(x_1-x_0)^2(x_1-x_2)^2}$

$b = \dfrac{1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \dfrac{(2x_1-x_0-x_2)x_1}{(x_1-x_0)^2(x_1-x_2)^2} =$

$= \dfrac{1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\left(1 + \dfrac{(2x_1-x_0-x_2)x_1}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\right)$

$C_2(x) = \dfrac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\left[1 - \dfrac{(x-x_2)(2x_1-x_0-x_2)}{(x_0-x_2)(x_1-x_2)}\right]$

Погрешность.

(5) Введём $g(s) \overset{df}{=} f(s) - H_3(s) - kw(s)$,

где $w(x) = (x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)$, — полином 4-й степени

$x \in [x_0, x_2]$

(K) выбираем из усл-я: $g(x)=0$

$\Rightarrow k = \dfrac{f(x)-H_3(x)}{w(x)}$

$\psi_{H_3}(x) \overset{df}{=} f(x) - H_3(x)$

$\exists$ f имеет необх-ю гладкость

$g(s)$ обращ-ся в 0 4 раза:

$g(x_0) = g(x_1) = g(x_2) = g(x) = 0$

$\Rightarrow$ по теор. Ролля $\Rightarrow$ 1-ая произв. $g'(s)$ имеет 3 нуля (не менее 3-х нулей) на $[x_0, x_2]$

Но $g'(x_1)=0 \Rightarrow g'(s)$ имеет на $[x_0, x_2]$ не менее 4-х нулей $\Rightarrow$

$\Rightarrow g''(s)$ — не — 3-х $\Rightarrow g'''(s)$ — не — 2-х $\Rightarrow$

$\Rightarrow g^{(4)}(s)$ — не — 1-го нуля:

$\exists\, \xi \in [x_0, x_2] : g^{(4)}(\xi) = 0$

$g^{(4)}(\xi) = f^{(4)}(\xi) - 4!\cdot k \Rightarrow \psi_{H_3}(x) = f(x) - H_3(x) =$

$= \underbrace{\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}}_{K} \underbrace{(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)}_{\omega(x)}$

Обозн. $M_4 = \sup\limits_{x_0 \le x \le x_2} |f^{(4)}(x)|$

$\Rightarrow |\psi_{H_3}(x)| \le \dfrac{M_4}{4!}|w(x)|$

17.02.
Лекц. 11.

Погрешность $\psi_{H_n}(x) = f(x) - H_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{a_0}(x-x_1)^{a_1}\cdot\ldots\cdot(x-x_m)^{a_m}$, $\xi \in [a,b]$

Зам. ИП Эрмита может быть получен из ИП Лагранжа с помощью предельного перехода.

x_0, x_1, x_2, x_3 – узлы

ИПЭ – $H_3(x)$; $l_3(x)$ – ИП Л.

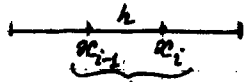
$\lim\limits_{x_3 \to x_2} l_3(x) = H_3(x)$

§6. Использование $H_3(x)$ для оценки погрешности квадратурной формулы Симпсона.

$\exists x \in [a,b]$

вычисление опр. инт-л $\int_a^b f(x)dx$ надо разбить $[a,b]$ на узлы:

$x_i - x_{i-1} = h$, $i = \overline{1,N}$, h – шаг разбиения



частичный отрезок

Квадр. ф-ла Симпс. на част. отр. имеет вид:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \frac{h}{6}\left(f_{i-1} + 4f_{i-\frac{1}{2}} + f_i\right), \quad i=\overline{1,N} \qquad (1)$$

($f_{i-\frac{1}{2}} = f\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)$)

Ф-ла (1) – квадр. ф-ла инт-го типа (приближаем подинт. ф-цию ИП Л. $l_3(x)$)

Сейчас мы <u>пок, что кв. ф-ла Симпс. точна + полиномы 3-ей степ.</u> (для 2-ой – очевидно по постр-ю)

Если $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, то для части $a_0 + a_1x + a_2x^2$ ф-ла точна (по построению — ф-цию приближаем параболой по 3-м точкам; 3-ья произв = 0 $\Rightarrow$ погр. = 0)

Пок., что она точна для части a_3x^3.

лев. ч. $\int_{x_{i-1}}^{x_i} x^3dx = \frac{x_i^4 - x_{i-1}^4}{4} = \frac{(x_i^2 - x_{i-1}^2)(x_i^2 + x_{i-1}^2)}{4} =$

$= \frac{\overbrace{(x_i - x_{i-1})}^{h}(x_i + x_{i-1})(x_i^2 + x_{i-1}^2)}{4} = \frac{h}{4}(x_i + x_{i-1})(x_i^2 + x_{i-1}^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ вычислили лев. ч. кв. ф-лы.

Теперь вычислим правую:

$$\frac{h}{6}\left(x_{i-1}^3 + 4x_{i-\frac{1}{2}}^3 + x_i^3\right) = \frac{h}{6}\left(x_i^3 + x_{i-1}^3 + 4\left(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\right)^3\right) =$$

$$= \frac{h}{6}(x_i + x_{i-1})\left[(x_i^2 - x_ix_{i-1} + x_{i-1}^2) + \frac{x_{i-1}^2 + 2x_ix_{i-1} + x_i^2}{2}\right] =$$

$$= \frac{h}{12}(x_i + x_{i-1})(2x_i^2 - 2x_{i-1}x_i + 2x_{i-1}^2 + x_{i-1}^2 + 2x_{i-1}x_i + x_i^2)$$

$$= \frac{h}{12}(x_i + x_{i-1})\,3(x_i^2 + x_{i-1}^2) = \frac{h}{4}(x_i + x_{i-1})(x_i^2 + x_{i-1}^2)$$

$\Rightarrow$ лев. ч. равна правой

$\Rightarrow$ для мн-на 3-ей степ. ф-ла Симпс. точна.

Займёмся вычислением погрешности квадр-х формул.

Погр. кв. ф-лы $\frac{df}{}$ – разность между лев. и пр. ч.

Построим полином $H_3(x)$ (кривая сред. уел-м):

$$H_3(x_{i-1}) = f_{i-1};$$
$$H_3(x_{i-\frac{1}{2}}) = f_{i-\frac{1}{2}};$$
$$H_3(x_i) = f_i.$$

($x \in [x_{i-1}, x_i]$ – частичн. отрезок) (2)

Как мы пок. на предыд. лекц. такой полином Э! Но он нам не понадобится.

$f(x) = H_3(x) + \underbrace{\psi_{H_3}(x)}$ – погреш-ть $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} H_3(x)dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \psi_{H_3}(x)dx \quad (=)$$

H_3 – алг. инт-я 3-ей степ. (для него ф. Симп. точна)

$$(=) \frac{h}{6}\left(H_3(x_{i-1}) + 4H_3(x_{i-\frac12}) + H_3(x_i)\right) + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \psi_{H_3}(x)dx =$$

$$= \{\text{вместо } H_3 \text{ подст. } f \text{ в узлах}\} = \overset{(2)}{=}$$

$$= \frac{h}{6}\left(f_{i-1} + 4f_{i-\frac12} + f_i\right) + \psi_i(f)$$

$$\Rightarrow \psi_i(f) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx - \frac{h}{6}\left(f_{i-1} + 4f_{i-\frac12} + f_i\right)$$

$\Rightarrow$ надо оценить $\psi_i(f)$ } это и есть искомая погр. квадр. ф-лы

$$\psi_{H_3}(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_{i-1})(x-x_{i-\frac12})^2(x-x_i), \quad \xi \in [x_{i-1}, x_i]$$

$$\Rightarrow |\psi_i(f)| \le \frac{M_4}{4!}\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x-x_{i-1})(x-x_{i-\frac12})^2(x_i-x)dx$$

обозн. $M_4 = \sup_x |f^{(4)}(x)|$

$(x_i - x)$ – стало все множителем этим нечет. степени

Надо посчитать S.

$x \in [x_{i-1}, x_i]$ можно записать в виде:

$x = x_{i-1} + th$, $0 \le t \le 1$ $\Rightarrow dx = h\cdot dt$

$x - x_{i-1} = th$; $x_i - x = h(1-t)$; $x - x_{i-\frac12} = h\left(1 - \frac{t}{2}\right)$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} (x-x_{i-1})(x-x_{i-\frac12})^2(x_i-x)dx =$$

$$= h^5 \int_0^1 t\left(1-\frac{t}{2}\right)^2(1-t)dt = \frac{1}{120}h^5$$

} посчитать }

$$\Rightarrow |\psi_i(f)| \le \frac{M_4}{4!}\frac{h^5}{120} = O(h^5) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ квадр. ф-ла Симпс. на част. отр. имеет 5-ый пор. точности

Теперь подсчит. погр-ть кв. ф. Симп. на всём отрезке:

Обозн. $\psi_h(f) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^{N} \frac{h}{6}\left(f_{i-1} + 4f_{i-\frac12} + f_i\right)$

$$\Rightarrow |\psi_n(f)| = \left|\sum_{i=1}^{N} \psi_i(f)\right| \le \frac{M_4}{4!}\frac{h\cdot N\cdot h^4}{120} = \left\{hN = \frac{b-a}{N}N = b-a\right\}$$

$$= \frac{M_4}{4!}\frac{h^4}{120}(b-a) = \left(\frac{h}{2}\right)^4 M_4 \frac{b-a}{180}$$

$\Rightarrow$ кв. ф. Симп. имеет 4-ый пор. точн. на $[a,b]$, тогда как прямоуг. и трап-ий – только 2-ой.

§7. Наилучшее среднеквадратичное приближение функций.

Ф-ции можно приближ. разн. способами (не только алг. полиномами).

Рассм. гильбертово пр-во:

$H = L_2$ – сепар. пр-во:

$f \in L_2$ означает, что $\int_a^b f^2(x)dx < \infty \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.е. это функц., интегрируемая с квадратом.

Введ. скал. произв.

$\forall f, g \in L_2 \quad (f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$

$\Rightarrow$ норма вектора

$$\|f\| = \|f\|_{L_2} = (f,f)^{1/2} = \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{1/2}$$

Теперь пр-во нормир-е

Пост. зад:

Дана система л/н. функций, интегрируемых с квадратом:

$\exists\ \varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ — л/н:

$$\int_a^b \varphi_i^2(x)\,dx < \infty,\ i=\overline{0,n}$$

Эту сист. иногда наз. **базисной**.

Составим **обобщ-ый** многочлен:

(1) $$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x),\ c_k - \text{числа}$$

Зад. о наим. ср. кв. пр: найти среди обобщ. мн-в такой:

(2) $$\overline{\varphi}(x) = \sum_{k=0}^{n} \overline{c}_k \varphi_k(x),$$

для которого

$$\int_a^b \Big(f - \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x)\Big)^2 dx \underset{\text{не}}{=} \|f-\varphi(x)\|^2$$ будет бы минимален

Т.е. надо найти $\overline{\varphi}(x)$:

$$\|f-\overline{\varphi}(x)\| = \min_{\varphi(x)} \|f-\varphi(x)\|$$

$\Rightarrow \overline{\varphi}(x)$ — наилучшее среднеквадратическое приближение. (НСКП)

Покажем, что НСКП всегда $\exists$ и (!).

Сначала рассм. случай (n=0), т.е. когда $\exists$ только одна баз. функция $\varphi_0(x)$.

$\Rightarrow$ Приближение ищем в виде

$$\varphi(x) = c_0 \cdot \varphi_0(x)$$

Обозн.

$$F(c_0) = \int_a^b (f(x) - c_0\varphi_0(x))^2 dx \quad (=)$$

— это парабола по c_0 с ветвями, напр-ми вверх

$$(=)\ c_0^2 \int_a^b \varphi_0^2(x)\,dx - 2c_0 \int_a^b f(x)\varphi_0(x)\,dx + \int_a^b f^2(x)\,dx =$$

$$= c_0^2(\varphi_0,\varphi_0) - 2c_0(f,\varphi_0) + (f,f)$$

мин. $F(c_0)$ будет дост-ся там, где $F'(c_0)=0$

$$\Rightarrow 2c_0(\varphi_0,\varphi_0) = 2(f,\varphi_0) \Rightarrow c_0 = \frac{(f,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)} = \overline{c}_0$$ обозн.

$\Rightarrow$ наим. ср. кв. прибл.

$$\overline{\varphi}(x) = \overline{c}_0\varphi_0(x),\ \overline{c}_0 = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_0(x)\,dx}{\int_a^b \varphi_0^2(x)\,dx}$$

ex $\varphi_0(x) \equiv 1 \Rightarrow \overline{c}_0 = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow \overline{\varphi}(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$ — среднее ин-е инт-ла f

СКП — это не поточечная близость, а интегральная.

Рассм. общую задачу.

$\exists\ \varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ — л/н сист. функций:

$$\int_a^b \varphi_i^2(x)\,dx < \infty,\ i=\overline{0,n}$$

Рассм. ф-л

$$F(c_0,c_1,\dots,c_n) \overset{df}{=} \int_a^b \Big(f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k\varphi_k(x)\Big)^2 dx =$$

будем находить мин. этого f

$$= \int_a^b f^2(x)\,dx - 2\sum_{k=0}^{n} c_k \int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx + \sum_{k=0}^{n} c_k \sum_{\ell=0}^{n} c_\ell \int_a^b \varphi_k(x)\varphi_\ell(x)\,dx =$$

$$= (f,f) - 2\sum_{k=0}^{n} c_k(f,\varphi_k) + \sum_{k=0}^{n} c_k \sum_{\ell=0}^{n} c_\ell(\varphi_k,\varphi_\ell)$$

мин. этой функции будет достигаться там, где ЧП-ые обр-ся в ноль:

$$\frac{\partial F(c_0,\dots,c_n)}{\partial c_k}=0,\ k=\overline{0,n}$$

Получили систему:

$$\sum_{l=0}^{n} c_l(\varphi_k,\varphi_l)=(f,\varphi_k),\ k=\overline{0,n}$$

Распишем её:

Пр-во вещественное

$$\begin{cases} c_0(\varphi_0,\varphi_0)+c_1(\varphi_0,\varphi_1)+\dots+c_n(\varphi_0,\varphi_n)=(f,\varphi_0)\\ c_0(\varphi_1,\varphi_0)+c_1(\varphi_1,\varphi_1)+\dots+c_n(\varphi_1,\varphi_n)=(f,\varphi_1)\\ \dots\\ c_0(\varphi_n,\varphi_0)+c_1(\varphi_n,\varphi_1)+\dots+c_n(\varphi_n,\varphi_n)=(f,\varphi_n) \end{cases}$$

– СЛАУ для нах-ия коэфов c_i, $i=\overline{0,n}$

Матрица

$$G(\varphi_0,\dots,\varphi_n)=\begin{pmatrix}(\varphi_0,\varphi_0)&\dots&(\varphi_0,\varphi_n)\\ \dots&\dots&\dots\\ (\varphi_n,\varphi_0)&\dots&(\varphi_n,\varphi_n)\end{pmatrix}$$ – матрица Грамма

$\Rightarrow |G|>0$ (т.к. сист. $\varphi_0,\dots,\varphi_n$ – л/н) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ сист. определённая $\Rightarrow$ при $\forall$ пр. ч. решение ∃!

Её решение: $\overline{c_0},\dots,\overline{c_n}$: $\overline{\varphi(x)}$ – НСКП.

Зам. опр-ль G может быть очень близок к 0 $\Rightarrow$ вычислить реш-ие трудно $\Rightarrow$ как же решать сист. при больших (n)?

Если бы сист. $\varphi_0,\dots,\varphi_n$ была бы ортонорм., т.е. $(\varphi_k,\varphi_l)=\delta_{kl}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $c_k=(f,\varphi_k)$, $k=\overline{0,n}$ – коэф-ты Фурье

$\Rightarrow$ решать ничего не надо!

Из зам. $\Rightarrow$ $\forall$ л/н сист. можно ортогонализовать методом Грама – Шмидта.

Сам. простая сист. $1,x,x^2,\dots,x^n=\{\varphi_i(x)\}_{i=0}^{n}$ – л/н

$(\varphi_k,\varphi_l)=\int_\alpha^\beta \rho(x)\varphi_k(x)\varphi_l(x)\,dx$, $\rho(x)>0$ – вес

будем находить в виде

Выбирая различные α,β,ρ можно получить мн-во ортог. сис-ов сист-мы: Якоби, Чебышева, Лежандра и т.д.

23.03. Лекц. 12.

$$0\le\int_a^b\Big(f(x)-\sum_{k=0}^{n}c_k\varphi_k(x)\Big)^2dx=\int_a^b f^2(x)\,dx-$$

$$-2\sum_{k=0}^{n}c_k(f,\varphi_k)+\sum_{k=0}^{n}c_k^2\ (*)$$

$(f,\varphi_k)=c_k$, $\sum_{k=0}^{n}c_k(\varphi_k,\varphi_l)=c_l$

$(*)$ если $\{\varphi_k(x)\}_0^n$ – о/н система

$$(*)\ \int_a^b f^2(x)\,dx-\sum_{k=0}^{n}c_k^2\ge 0$$

$$\Rightarrow\boxed{\sum_{k=0}^{n}c_k^2\le\int_a^b f^2(x)\,dx=\|f\|^2}$$ нер-во Бесселя

Если $\{\varphi_k(x)\}$ – о/н базис $L_2(a,b)$

$$\Rightarrow\boxed{\|f\|^2=\sum_{k=0}^{\infty}c_k^2}$$ рав-во Парсеваля

Глава III. Численное решение нелинейных уравнений и систем нелинейных уравнений.

§1. Введение.

$\exists f$ – непр. нелин-е функ. действ. арг-та.
Нам надо найти нули этой функ., т.е. корни ур-ия

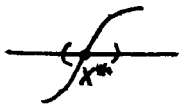
$$f(x) = 0 \quad (1)$$

Такое ур-е часто на практике решают с пом-ю итер. методов.

Ф-ция $f(x)$ часто исключительно сложная.
Поиск аналит-х решений ограничен.

Реш-е ур-ия (1) распадается на два этапа:

1) локализация корня:
$f(x_*) = 0$, x_* – корень (нуль ф-ции)
Здесь мы должны найти окр-ть, в кот. нах-ся корень, чтобы начать итерац. процесс.
Эта лок-ция в общем случае осущ-ся в обл. комп. чисел.



Ит. процесс нельзя начинать с $\forall$ нач. приближения.

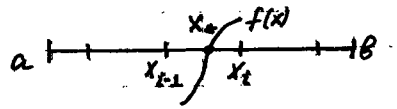
2) $\exists x_* \in U_a(x_*) = \{x : |x - x_*| < a\}$ $a > 0$ — окр-ть

ищем $x_n \to x_*$, $n \to \infty$
(строим итер. процесс ☺)

(мы в основном будем заним-ся постр-ем ит. процесса)

1) Способы локализации

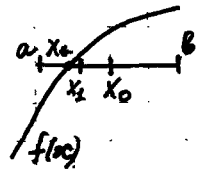
(1.) Разбиваем отр. $[a,b]$ узлами:



если $f(x_{i-1}) \cdot f(x_i) < 0$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$ – корень
(один корень точно есть)
Но, если > 0, то мы не можем говорить, что корня нет.

Если корень не один $\Rightarrow$
представим $f(x) = (x - x_*) g(x)$,
рассм. $g(x) = \dfrac{f(x)}{x - x_*}$

(2.) способ (Бисекции) — более регулярный метод



$$x_0 = \frac{a+b}{2}$$

$\exists$ $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ | если $f(x_0) > 0 \Rightarrow x_* \in [a, x_0]$

$$x_1 = \frac{a + x_0}{2}$$ если $f(x_1) > 0 \Rightarrow x_* \in [a, x_1]$

и т.д.

Если говорится об ε-окр-ти т. x_0:
$x_* \in U_\varepsilon(x_0)$, $\varepsilon > 0$ – задано.

Для систем ЧМ имеет очень зафиксир.
Рассм. сист.:

$$f_i(x_1, x_2, \dots, x_m) = 0, \quad i = \overline{1,m} \quad (2)$$

Введём вектор $\bar{f} = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$

$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$

$\Rightarrow$ сист. (2) запиш-ся в виде $\bar{f}(\bar{x}) = 0$
{будем писать $f(x) = 0$}

Можно трактовать f как отобр-е:

$$f : R_m \to R_m.$$

§2. Метод простой итерации (МПИ)

Цель – решить ур-е:

(1) $f(x) = 0$

$\exists\ f(x)$ – непрерывная на $[a,b]$

$\exists\ x_*$ – корень : $f(x_*) = 0$.

Он локализован : $x_* \in U_a(x_*)$

Причём степень точности локализации такая, кот. треб-ся методом.

МПИ : Заменим ур-е (1) ур-ем

(2) $x = S(x)$

(3) Итер. процесс : $x_{n+1} = S(x_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$;

$x_0 \in U_a(x_*)$ – начальное приближение

Какой должна быть $S(x)$?

(4) $S(x) = x + \tau(x) f(x)$,

где $\tau(x)^{\forall x}$: $\operatorname{sign} \tau(x) \neq 0 \quad \forall x \in U_a(x_*)$

$\Rightarrow$ сходимость МПИ будет зависеть от выбора $\tau(x)$.

Опр. $S(x)$ – липшиц-непрерывна для $x \in U_a(x_*)$ с константой q, если $\forall x_1, x_2 \in U_a(x_*) \Rightarrow$

$$\Rightarrow |S(x_2) - S(x_1)| \leq q |x_2 - x_1|$$

{ удовл. усл. липш. с конст. q – много средне между непр-ю и дифференцир-ю }

Замеч. $\exists\ S'(x)$ в окр-ти корня ($x \in U_a(x_*)$), $|S'(x)| \leq q$, $x \in U_a(x_*) \Rightarrow$

$\Rightarrow S(x)$ удовл. усл-ю липшица.

Утв. Пусть ф-я $S(x)$ – липшиц – непрерывна в окр-ти нек-го корня : $x \in U_a(x_*)$ с $q \in (0,1)$

$\Rightarrow$ если выбрать $x_0 \in U_a(x_*)$, то МПИ сходится со скоростью геом. прогрессии со знам-м q :

$$|x_n - x_*| \leq q^n |x_0 - x_*|.$$

Док-во (по индукции)

$x_0 \in U_a(x_*)$

$\exists\ x_n \in U_a(x_*)$

Док, что $x_{n+1} \in U_a(x_*)$

Пасем. $|x_{n+1} - x_*| = |S(x_n) - S(x_*)| \leq q |x_n - x_*| \Rightarrow$ (↑ усл-е липш.)

$\Rightarrow x_{n+1} \in U_a(x_*)$ (своею очередь сосед. ит-ем линейная)

$\Rightarrow$ пасем. как рекурр-ю :

$$|x_n - x_*| \leq q^n |x_0 - x_*|$$

$$\Rightarrow x_{n+1} \xrightarrow[n \to \infty]{} x_* \quad \blacksquare$$

Замеч. Если $\exists\ S'(x)$ и $q \overset{df}{=} \max\limits_{x \in U_a(x_*)} |S'(x)|$, (*)

то при $0 < q < 1$ МПИ сходится.

Замеч. Др-ая часто исп-ся форма записи МПИ

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\tau} + f(x_n) = 0 \quad , \tau > 0 \qquad (5)$$

Укажем, как выбирать τ, чтобы МПИ сходился.

Если выбрать $S(x) = x - \tau \cdot f(x)$, то $S(x_n) = x_{n+1}$

$\exists\ \exists\ f'(x)$, $x \in U_a(x_*)$

Имеем τ, при кот-х сх-ся.

$S'(x) = 1 - \tau \cdot f'(x)$

Найдем τ : $q < 1 \Rightarrow |1 - \tau f'(x)| < 1$, $M_1 = \sup\limits_{x \in U_a(x_*)} |f'(x)|$

(уд. (*)) $\quad \forall x \in U_a(x_*)$

$-1 < 1 - \tau M_1 < 1 \Rightarrow \boxed{\tau < \frac{2}{M_1}}$

Метод Эйткина ускорения сходимости.

(6) $\exists\, \forall n \Rightarrow x_n - x_* \cong A \cdot q^n$

Задача: выразить x_* ч/з x_{n-1}, x_n, x_{n+1}.

Рассм. при разных (n) 3 ур-ия:

$$\begin{cases} x_{n+1} - x_* = Aq^{n+1} \\ x_n - x_* = Aq^n \\ x_{n-1} - x_* = Aq^{n-1} \end{cases} \Rightarrow x_* = x_{n+1} - \underbrace{Aq^{n+1}}_{\text{исключ.}}$$

$$(x_{n+1} - x_n)^2 = A^2 q^{2n}(q-1)^2$$

$$(x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}) = A(q^{n+1} - 2q^n + q^{n-1}) = A q^{n-1}(q-1)^2$$

выкинем $\Rightarrow Aq^{n+1} = \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}$ — это аппр. 1-ой разн. произв.

$$\Rightarrow \boxed{x_* = x_{n+1} - \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}}$$

это аппроксимация второй разности. произв. $\times h^2$

Это приближение существенно лучше.

§3. Метод Ньютона и метод секущих.

Недост. МПИ – медл. сходимость.

Решаем ур-е

(1) $f(x) = 0$

Задана окр-ть корня: $U_a(x_*)$

Обозн. x^n – n-я итерация.

$\exists\, f'(x) \neq 0$ при $x \in U_a(x_*)$

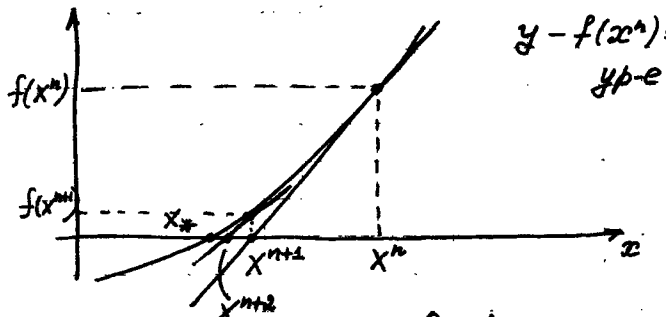
(2) $\Rightarrow \boxed{x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(x^n)}}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

x^0 – задано ($x^0 \in U_a(x_*)$)

↑ нач. приб. надо брать очень близко к корню

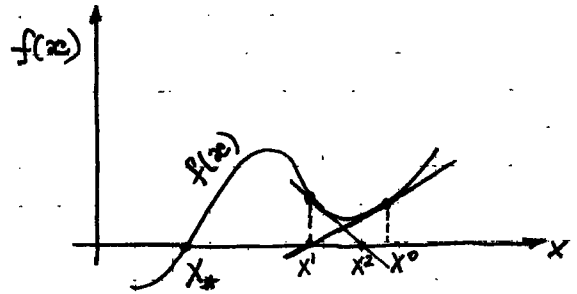
{ здесь $\tau(x) = \frac{1}{f'(x)}$ }

Этот метод еще наз-ют <u>мет. касательных.</u>



$y - f(x^n) = f'(x^n)(x - x^n)$ – ур-е касательной

<u>Ex</u> если неудачно выбрать нач. приб-е, сх-ти нет



$\Rightarrow$ зацикливание $\Rightarrow$ сх-ти нет

<u>Модифицированный мет. Ньют.</u>

(чтобы избежать такой ситуации)

$$x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(x^0)} \qquad (3)$$

Но: (3) сх-ся гораздо медленнее, чем (2). (но мы не зациклимся).

Пок., как получ. ф-ла (2):

из <u>разложения Тейлора</u> и отбрасывания соотв-х членов.

x_* – корень: $f(x_*) = 0$

Запишем разложение $f(x_*)$ в т. x.:

$$f(x_*) = f(x) + (x_* - x) f'(x) + \ldots = 0$$

Заменим $x_* \to x^{n+1}$, $x \to x^n$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(x^n) + (x^{n+1} - x^n) f'(x^n) = 0 \Rightarrow$ { в предпол-ии $f'(x^n) \neq 0$ }

$$\Rightarrow \boxed{x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(x^n)}}, \quad n = 0,1,\dots, \; x^0 \in U_\delta(x_*).$$

24.03. Лекц. 13.

(4) Сист. нелин. ур-ий

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

$\exists$ (x_1^*, x_2^*) – решение (4):

$f_1(x_1^*, x_2^*) = 0$; $f_2(x_1^*, x_2^*) = 0$

разложим по ф-ле Тейлора:

$$f_1(x_1^*, x_2^*) = f_1(x_1, x_2) + \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1}(x_1^* - x_1) + \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2}(x_2^* - x_2) + \dots = 0$$

$$f_2(x_1^*, x_2^*) = f_2(x_1, x_2) + \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1}(x_1^* - x_1) + \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2}(x_2^* - x_2) + \dots = 0$$

Сделаем замену $x_i \to x_i^n$, $x_i^* \to x_i^{n+1}$

$$\begin{cases} f_1(x_1^n, x_2^n) + \frac{\partial f_1(x_1^n, x_2^n)}{\partial x_1}(x_1^{n+1} - x_1^n) + \frac{\partial f_1(x_1^n, x_2^n)}{\partial x_2}(x_2^{n+1} - x_2^n) = 0 \\ f_2(x_1^n, x_2^n) + \frac{\partial f_2(x_1^n, x_2^n)}{\partial x_1}(x_1^{n+1} - x_1^n) + \frac{\partial f_2(x_1^n, x_2^n)}{\partial x_2}(x_2^{n+1} - x_2^n) = 0 \end{cases}$$

Запишем эту систему в матричном виде.

Обозн. $x^n = \begin{pmatrix} x_1^n \\ x_2^n \end{pmatrix}$, $x^{n+1} = \begin{pmatrix} x_1^{n+1} \\ x_2^{n+1} \end{pmatrix}$, $f(x^n) = \begin{pmatrix} f_1(x^n) \\ f_2(x^n) \end{pmatrix}$,

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$ – матр. из част. производных

$\Rightarrow$ система примет вид

$$\boxed{f(x^n) + J(x^n)(x^{n+1} - x^n) = 0}, \quad n = 0,1,\dots \quad (5)$$

x^0 – нач. приб-е

Если $\exists J^{-1}(x^n)$ (здесь она $\exists$), то

$$\boxed{x^{n+1} = x^n - J^{-1}(x^n) \cdot f(x^n)} \quad (6)$$

$\exists$ задана сист. из (m) ур-ий:

$$f_1(x_1, \dots, x_m) = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$f_m(x_1, \dots, x_m) = 0$$

$\Rightarrow$ анал-е действие породит м-цу

$J(\bar{x}) = (f_{ij})$, $i,j = \overline{1,m}$, где $\bar{X} = (x_1, \dots, x_m)^T$

$f_{ij} = \frac{\partial f_i(\bar{x})}{\partial x_j}$ $\Rightarrow$ получили ту же формулу зап. (5) сист. Ньют.

Зам. м-ца J вычисл-ся на кажд. итерации и это непростая процедура. Поэтому обычно решают именно (5), не обращая J, вводя вектор $v^{n+1} = x^{n+1} - x^n$

$\Rightarrow f(x^n) + J(x^n) v^{n+1} = 0$ $\Rightarrow$ нах. v^{n+1} $\Rightarrow$

$\Rightarrow x^{n+1} = v^{n+1} + x^n$

Здесь тоже часто применяют модиф-ый метод Ньютона:

$x^{n+1} = x^n - J^{-1}(x^0) f(x^n)$, т.е. J^{-1} нах. только один раз для нах. приближения

Метод секущих (хорд).

Рассм-ем для 1-го ур-ия {для сист. – анал.}
Мет. Ньют:

$$x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(x^n)}, \quad n = 0,1,\dots,$$
x^0 – нач. прибл.

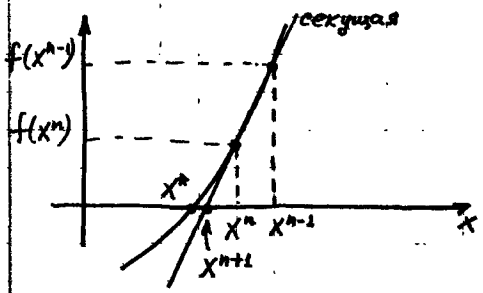
Заменим $f'(x^n)$ дискретным аналогом

$$f'(x^n) = \frac{f(x^n) - f(x^{n-1})}{x^n - x^{n-1}}$$

Подст. это в метод Ньютона:

$$\boxed{x^{n+1} = x^n - \frac{x^n - x^{n-1}}{f(x^n) - f(x^{n-1})} f(x^n)}, \quad n = 1,2,\dots \qquad (7)$$

Для начала счёта нам надо два значения: x^0, x^1 – нач. усл-я.
Пойдём идеологию многошаговых итер. методов.
Метод секущих требует для нах-я x^{n+1}: x^n и x^{n-1} ⇒
этот метод двухшаговый



Мы построили здесь интерполяц. полином $f(x)$ по двум точкам ⇒ двухшаговый метод.

Можно строить многошаговые итерац. методы.

§4. Сходимость метода Ньютона. (достаточные условия). Оценка скорости сходимости метода Ньютона.

Рассм. нелин. ур-е

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

∃ задана окр-ть корня x_* – корень; $V_a(x_*)$
требование на гладкость $f(x)$ – $\exists f'''(x)$

Метод Ньют: $x^{n+1} = x^n - \frac{f(x^n)}{f'(x^n)}$, $n = 0,1,2,\dots$ (2)
$x^0 \in V_a(x_*)$

Почему мет. (2) сх-ся?
(2) можно рассм. как МПИ:

$$x^{n+1} = S(x^n), \quad n = 0,1,\dots \qquad (3)$$

где $S(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ (4)

Продиффер-ем $S(x)$ (в предп-ии $\exists f''(x)$) ⇒

$$\Rightarrow S'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

$$\Rightarrow S'(x) = \frac{f(x)\cdot f''(x)}{(f'(x))^2} \qquad (5)$$

$$\Rightarrow \boxed{S'(x_*) = 0}, \text{ т.к. } f(x_*) = 0$$

Для МПИ было: если $|S'(x)| \le q < 1$, то МПИ сходится

Из $S'(x_*) = 0$ ⇒ ∃ окрестность $V_a(x_*)$, ⇒
где $|S'(x)| < 1$
(со скоф. геом. прогр.)
⇒ метод Ньютона сходится ■

Теперь оценим скорость сх-ти (точнее).

Введём погреш-ть $z_n = x^n - x_*$ – погрешность на n-ой итерации
⇒ $z_{n+1} = x^{n+1} - x_* = S(x^n) - S(x_*)$

Рассм. разность $\{S(x_*)=x_*\}$

$$z_{n+1} = S(z_n+x_*) - S(x_*) = \underbrace{S(x_*)}_{\text{тейлор}} + \underbrace{S'(x_*)}_{=0} z_n + \\ + 0{,}5\,S''(\tilde{x}^n) z_n^2 - S(x_*)$$

$$\Rightarrow \boxed{z_{n+1} = 0{,}5\,S''(\tilde{x}^n)\,z_n^2}, \quad \tilde{x}^n = x_* + \Theta z_n, \ |\Theta|<1$$

(6) Пусть $\exists M>0 : |0{,}5\,S''(\tilde{x}^n)| \le M$

$$\Rightarrow |z_{n+1}| \le M|z_n^2| \Rightarrow M|z_{n+1}| \le (M|z_n|)^2$$

(7) Обозн. $v_n = M|z_n| \Rightarrow \boxed{v_{n+1} \le v_n^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ это и означает ту самую квадратичную связь

Применяем (7) как рекуррентную $\Rightarrow$

$$\Rightarrow v_n \le v_0^{2^n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M|z_n| \le (M|z_0|)^{2^n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{|z_n| \le \frac{1}{M}(M|z_0|)^{2^n}}$$

Обозн. $M|z_0| = q \Rightarrow |z_n| \le \frac{1}{M} q^{2^n}$

Выберем $q<1 \Rightarrow M|z_0|<1 \Rightarrow |z_0|<\frac{1}{M} \Rightarrow$

(8) $$\Rightarrow \boxed{|x^0 - x_*| < \frac{1}{M}}$$ $\Rightarrow$ нач. приближение выбираем в соотв. с усл. (8) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ конечная оценка имеет вид:

(9) $$\boxed{|x^n - x_*| \le \frac{1}{M}(M|x^0 - x_*|)^{2^n}}$$ ■

Утв (об оценке скор. сход-ти)

Пусть $\exists$ конст. M, удовл. усл-ю

(10) $$0{,}5\left|\left(\frac{f\cdot f''}{(f')^2}\right)'\right| \le M$$ $\{$это так, если $\exists f'''\}$

для всех $x \in U_a(x_*)$, x_* - корень, $a = a(M)$.

Пусть нач. приближение x^0 удовл. усл. (8): $|x^0 - x_*| < \frac{1}{M}$.

$\Rightarrow$ итер. мет. Ньют. (2) реш-ия ур-ия (1) сходится и имеет место оценка (9).

Зам. 1) если имет Ньют. сх-сь, то он сх-ся очень быстро (за 3-4 итерации)

2) нач. приближение надо выбирать близко к корню.

Пок. теперь, что у модиф-го мет. Ньют. сх-ть более медленная (но быстрее МПИ)

Для мод. МН $\Rightarrow S'(x_*) = 1 - \frac{f'(x_*)}{f'(x^0)} \Rightarrow$

$\Rightarrow S'(x_*)$ не будет нулем $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ сходимость линейная

(анал. для мод. мет. сек-ных)

Т.о., ит. мет. Ньют. — самый эффект. мет. для решения систем нелин. ур-ий

Глава IV. Разностные методы решения задач математической физики.

§1. Разностные схемы для I-ой краевой задачи уравнения теплопроводности.

Рассм. I кр. з. ур. тепл.:

(1) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) & 0<x<1 \\ & 0<t\le T \end{cases}$ $\{T$ – любое$\}$

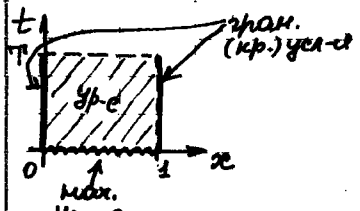
↳ линейное ур-е тепл-ти

Заданы краевые (граничные) усл-ия I-го рода:

(2) $\begin{cases} u(0,t) = \mu_1(t), \\ u(1,t) = \mu_2(t), \end{cases} \quad 0\le t\le T$

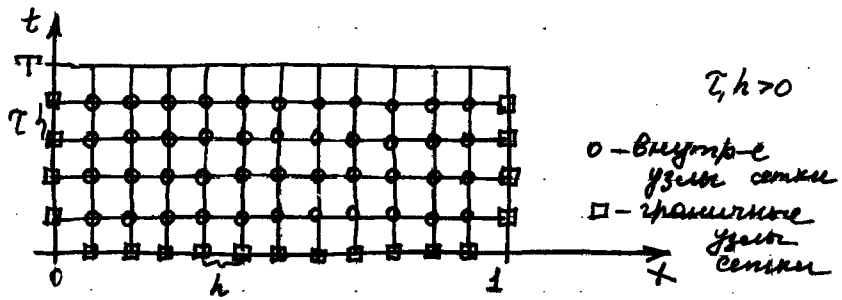
Начальное условие:

(3) $u(x,0) = u_0(x), \quad 0\le x\le 1$



Надо найти функцию, непр-ую в замкн. обл., уд. (1)-(3).

При решении разностной задачи прежде всего строят сетку.
Мы будем рассм. только сетки с постоянным (равномерным) шагом.



$\tau, h > 0$

○ – внутр-е узлы сетки
□ – граничные узлы сетки

$w_h = \{x_i = i\cdot h,\ i=\overline{1,N-1},\ Nh=1\}$ – сетка
$w_\tau = \{t_j = j\cdot\tau,\ j=\overline{1,j_0},\ j_0\tau = T\}$ | h-шаг сетки, x_i-узлы

$\overline{w}_h = \{x_i = i\cdot h,\ i=\overline{0,N},\ Nh=1\}$ – замыкание
$\overline{w}_\tau = \{t_j = j\cdot\tau,\ j=\overline{0,j_0},\ j_0\tau = T\}$

$w_{\tau h} = w_\tau \times w_h$ — узлы прям-ной сетки.
$\overline{w}_{\tau h} = \overline{w}_\tau \times \overline{w}_h$

Обозн. $u_i^n = u(x_i,t_n),\ (x_i,t_n)\in\overline{w}_{\tau h}$
$y_i^n = y(x_i,t_n),\ (x_i,t_n)\in\overline{w}_{\tau h}$
$f_i^n = f(x_i,t_n)$

От выбора спос. апр-ции зависит кач-во разностн. схемы.

1°. Явная разностн. схема.

$$\frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau} = \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2} + f(x_i,t_n),\quad (x_i,t_n)\in w_{\tau h} \qquad (4)$$

$$y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}),\ t_{n+1}\in\overline{w}_\tau \qquad (5)$$

$$y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}),$$

$$y_i^0 = u_0(x_i),\ x_i\in\overline{w}_h \qquad (6)$$

(4)-(6) – это смеш. нач. кр. урий отн. y.
(разностн. схс. для реш-ия зад. (1)-(3))

Круг вопросов отн. разн. схем:
1) погрешность аппроксимации разностной схемы (РС)
2) (4)-(6) — дискретн. аналог (1)-(3). РС обязат. должна с какой-то степ. приближать исходную

задача – получить сх-ть и уст-ть в более сильной метрике (норме).
(поточечн. близость сильнее, чем сх. в среднекв. норме)

2) существование и единств-ть решения разностной задачи

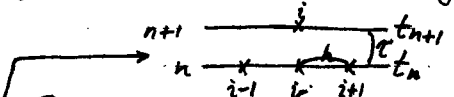
3) алгоритм нахождения разностного решения

4) устойчивость разностн. схемы – ключевой вопр.
Это чисто внутр. свво РС

5) сходимость разн. схемы к решению исх. задачи и порядок точности разн. схемы
$y_i^n \to u_i^n$ при $\tau, h \to 0$

/* аппрокс-ция произв. должна быть связ. с аппр. урия */

Введём шаблон РС.
Слой – совок-ть всех узлов при пост. t_n



Решение будет идти по слоям снизу вверх.
Какие узлы мы исп-ли?
⇒ говорят, что РС записана на четырёхточечном шаблоне

Погреш-ть аппрокс. мы будем рассматривать на решении.

$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} \approx u_t(x_i, t_n) + \underline{O}(\tau)$, когда u – дост. гладкая

(аппр. 1-ой произв. по t)

Аппроксимация по простр. перем-ой:

$$\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} \approx u_{xx}(x_i, t_n) + \underline{O}(h^2)$$

⇒ разн. ур-е (4) приближает исходное с погрешностью

$$\psi_i^n = O(\tau + h^2)$$

Запишем алгоритм нах-ия разн. решения.
Пусть найдено y_i^n на t_n-слое

$$\Rightarrow y_i^{n+1} = y_i^n + \frac{\tau}{h^2}(y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n) + \tau f_i^n, \quad i = \overline{1, N-1}$$

$$y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}), \quad y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}) \quad \to n = \overline{0, J_0}$$

⇒ реш-е на $(n+1)$-м слое нах-ся по явной формуле

Обозн. $\gamma = \frac{\tau}{h^2}$.

Явная разн. схема устойчива, если

$$\gamma = \frac{\tau}{h^2} \le 0{,}5 \qquad (*)$$

⇒ сх-ть в сильной норме C обеспечена.

ex $T = 1$, $h = 10^{-2}$ ⇒ τ надо выбирать:
$\tau \le 0{,}5 \cdot 10^{-4}$

⇒ надо 20000 слоев

Сходимость.

Надо выбрать норму.

$\|y^n\|_C = \max\limits_{0\le i\le N} |y_i^n|$ — дискр. $\Big\}$ нормы C

$\|u\|_C = \max\limits_{0\le x\le 1} |u(x,t)|$ — непр. $\Big\}$

чтоб док-ли сх-ть именно в этой норме.

Для иссл. сх-ти введём сеточную функцию

(8) $z_i^n = y_i^n - u_i^n$ — погрешность разностного решения (не погр. аппр-ции)

Два подх.: • из дискр. в непр.
• из непр. в дискр. (ч)
(проект-ем в дискр. пр-во)

Выразим $y_i^n = z_i^n + u_i^n$ и подставим в (4)

Получим дискр. задачу для погреш-ти:

(9) $\dfrac{z_i^{n+1} - z_i^n}{\tau} = \dfrac{z_{i+1}^n - 2z_i^n + z_{i-1}^n}{h^2} + \psi_i^n, (x_i, t_n) \in \omega_{\tau h}$,

(10) где $\psi_i^n = -\dfrac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \dfrac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + f_i^n$

Опр. Ф-ция ψ_i^n наз. погреш-ю аппроксимации разн. ех. (4)–(6) на решении исх. задачи (1)–(3)

$\psi_i^n = O(\tau + h^2)$

(11) $z_0^{n+1} = z_N^{n+1} = 0$ (краев. усл.)

(12) $z_i^0 = 0$ (нач. усл.)

Разрешим z_i^{n+1} на $(n+1)$-м слое: 106

$z_i^{n+1} = z_i^n + \gamma(z_{i+1}^n - 2z_i^n + z_{i-1}^n) + \tau\psi_i^n$

Для сх-ти РС к реш. зад. дост. усл. (7)

$\|z^n\|_C \underset{\text{обозн.}}{=} \|z^n\| = \max\limits_{0\le i\le N} |z_i^n|$

$\Rightarrow z_i^{n+1} = (1-2\gamma) z_i^n + \gamma(z_{i+1}^n + z_{i-1}^n) + \tau\psi_i^n$

$|z_i^{n+1}| \le \underbrace{(1-2\gamma)}_{\overset{\text{IV}}{>0}\ (7)} |z_i^n| + \gamma(|z_{i+1}^n| + |z_{i-1}^n|) + \tau|\psi_i^n|$

$|z_i^{n+1}| \le (1-2\gamma)\|z^n\|_C + 2\gamma\|z^n\|_C + \tau\|\psi^n\|_C$

Это справедливо при всех i $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ можно замен. на $\|\cdot\|$

$\Rightarrow \|z^{n+1}\|_C \le \|z^n\|_C + \tau\|\psi^n\|_C$ (13)

$\Rightarrow$ если (7) вып, то вып. оценка (13).

Запиш. её как реккур-ю:

$\|z^{n+1}\|_C \le \|z^0\|_C + \sum\limits_{k=0}^{n} \tau\|\psi^k\|_C$ (**)

$\Rightarrow \|z^{n+1}\|_C \le \sum\limits_{k=0}^{n} \tau\|\psi^k\|_C$ (*)

т.к. $\psi_i^n = O(\tau + h^2) \Rightarrow \exists M > 0$ (M не завис. от τ и h):

$\|\psi^n\|_C \le M(\tau + h^2)$

подст. в (*) $\Rightarrow \|z^{n+1}\|_C \le M \sum\limits_{k=0}^{n} \tau \underbrace{(\tau + h^2)}_{t_n}$

введём $M_1 = TM$

$\Rightarrow \|z^{n+1}\|_C \le M_1(\tau + h^2)$ (14)

M_1 не завис. от τ и h

$\Rightarrow \|y^{n+1} - u^{n+1}\|_C \longrightarrow 0 \quad \underset{h\to 0}{\tau\to 0}$

это означает сх-ть к решению зад (1)–(3) с 1-м порядк. по τ и 2-м по h

Когда иссл. уст-ть, то обычно получают априорные оценки.

Устойчивость.

Рассм. нач. кр. при нулевом краевом усл-ях

$$\Rightarrow \|y^{n+1}\|_C \le \underbrace{\|u_0\|_C}_{\text{нач. усл.}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \tau \|f^k\|_C}_{\text{прав. ч.}} \quad (15)$$

(**)

Эта оценка наз. априорной оценкой
Она означает уст-ть реш. реше-ния по нач. усл. и правой части.

$\Rightarrow \|y^n\|_C \le M_1 \|u_0\|_C + M_2 \|f\|_C$, M_1 и M_2 не зависят от τ и h.

Докажем, что усл. (*) явл. и необх-ым.
Если нет ограничений на шаге сетки, то сх-ть абсолютная.
У нас — условная.

Пок, что если (*) нарушено, то решение будет неогр. возрастать.

(Необх-ть) Реш этого рассм. однор. ур-е:

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \frac{y_{i+1}^n - 2y_i^n + y_{i-1}^n}{h^2} \quad (16)$$

↓
Если реш. одн. неогр. возр $\Rightarrow$ и реш. неодн. тоже неогр. возр (т.к. оно явл. Σ)

Решение ищем в виде

$$y_j^n = q^n e^{ijh\varphi}, \text{ где} \quad (17)$$

$i^2 = -1$, h – шаг, $\varphi \in R$ (действит-е), q – комплексное число

Говорят, что это отдельная гармоника.
Пок, что если (*) наруш., то (17) неогр. возр.

если $|q| > 1 \Rightarrow y_j^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

Найдём $q = 1 + \gamma(e^{ih\varphi} - 2 + e^{-ih\varphi})$ (=) (из (16), (17))

$$e^{ih\varphi} = \cos h\varphi + i \sin h\varphi$$

(=) $1 + \gamma(\cos h\varphi - 2) = 1 + 2\gamma(\cos h\varphi - 1) =$

$= 1 - 4\gamma \sin^2 \frac{h\varphi}{2}$

посмотрим при каких γ $|q| > 1$ (т.е. $q < -1$)

$\Rightarrow 1 - 4\gamma \sin^2 \frac{h\varphi}{2} < -1 \Rightarrow$

$2\gamma \sin^2 \frac{h\varphi}{2} > 1 \Rightarrow \gamma > \frac{1}{2\sin^2 \frac{h\varphi}{2}}$

$\Rightarrow$ при $\gamma > \frac{1}{2}$ решение (17) неогр. возрастает

$\Rightarrow$ решение не устойчиво

2° Чисто неявная разностная схема (схема с опережением)

Рассм. задачу (1)–(3).

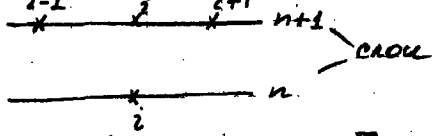
$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \frac{y_{i+1}^{n+1} - 2y_i^{n+1} + y_{i-1}^{n+1}}{h^2} + f(x_i, t_{n+1}), \quad (x_i, t_n) \in \omega_{\tau h} \quad (4)$$

$y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1})$, $t_{n+1} \in \overline{\omega_\tau}$ (5)

$y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1})$ (6)

$y_i^0 = u_0(x_i)$, $x_i \in \overline{\omega_h}$

Шаблон этой схемы:



$\Rightarrow$ 4-х точечный шаблон

Погреш-ть $\psi_i^n = O(\tau + h^2)$

Ур-е трёхточечное $\Rightarrow$ сеточ. ур-ия будет иметь трёхдиаг. вид и решать её будем методом прогонки.

$\gamma = \frac{\tau}{h^2}$

$$\gamma y_{i+1}^{n+1} - (1+2\gamma) y_i^{n+1} + \gamma y_{i-1}^{n+1} = -F(y_i^n), \quad i = \overline{1, N-1} \qquad (7)$$

$$y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}), \quad y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1})$$

$$y_i^0 = u_0(x_i)$$

$F(y_i^n) = y_i^n + \tau \cdot f_i^{n+1}$

Это СЛАУ с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -(1+2\gamma) & \gamma & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \gamma & -(1+2\gamma) & \gamma & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma & -(1+2\gamma) & \gamma & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \gamma \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \gamma & -(1+2\gamma) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ это м-ца со строгим диаг. преобл. $\Rightarrow$ $\det A \neq 0 \Rightarrow$ СЛАУ имеет ед. реш-е при $\forall$ прав. частях

31.03.04
Лекц. 15

Введём сеточ. ф-цию

$z_i^n = y_i^n - u_i^n$ – погреш. разн. схемы

$$\Rightarrow \frac{z_i^{n+1} - z_i^n}{\tau} = \frac{z_{i+1}^{n+1} - 2z_i^{n+1} + z_{i-1}^{n+1}}{h^2} + \psi_i^n \qquad (x_i, t_n) \in \omega_{\tau h} \qquad (8)$$

$$z_0^{n+1} = 0, \quad z_N^{n+1} = 0, \quad t_n \in \overline{\omega_\tau} \qquad (9)$$

$$z_i^0 = 0, \quad x_i \in \overline{\omega_h} \qquad (10)$$

Погр. аппр. разн. сх. на реш. задачи (1)–(3)

$$\psi_i^n = -\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{h^2} + f_i^{n+1}$$

Задача. Пок., что $\psi_i^n = O(\tau + h^2)$

Получим априорную оц. из принципа максимума для дискр. ф-й (это и будет означать устойчивость).

Фиксируем узел i_0, в котором

$$|z_{i_0}^{n+1}| = \max_{1 \le i \le N} |z_i^{n+1}| = \|z^{n+1}\|_C$$

Перепишем ур.-е (8) как трёхмер.:

$$(1+2\gamma) z_i^{n+1} = \gamma z_{i+1}^{n+1} + \gamma z_{i-1}^{n+1} + \tau \psi_i^n + z_i^n$$

Запишем это ур-е в i_0-м слое и возьмём по модулю:

$$(1-2\gamma)|z_{i_0}^{n+1}| \le \gamma |z_{i+1}^{n+1}| + \gamma |z_{i-1}^{n+1}| + \tau |\psi_i^n| + |z_i^n|$$

Заменим в пр. ч. на норму – нер-во усилится

$$(1+2\gamma)|z_{i_0}^{n+1}| \le 2\gamma \|z^{n+1}\|_C + \tau \|\psi^n\|_C + \|z^n\|_C$$

$$\Rightarrow (1+2\gamma)\|z^{n+1}\|_C \le 2\gamma \|z^{n+1}\|_C + \tau \|\psi^n\|_C + \|z^n\|_C$$

$$\Rightarrow \|z^{n+1}\|_C \le \|z^n\|_C + \tau \|\psi^n\|_C$$

Используем эту оц. как рекк. и получим почти рс ч/з погр. аппр-ции.

$$\Rightarrow \|z^{n+1}\|_C \le \underbrace{\|z^0\|_C}_{=0} + \sum_{k=0}^{n} \tau \|\psi^k\|_C \quad (\Rightarrow)$$

т.к. $\psi_i^n = \underline{\underline{O}}(\tau + h^2)$, то $\exists M > 0$, не завис. от τ и h,

$$\Rightarrow \|\psi^k\| \le M(\tau + h^2)$$

$(\Rightarrow) \|z^{n+1}\|_C \le M_1(\tau + h^2)$, где $M_1 = M \cdot t_n \le MT$ не зав. от τ и h

$\Rightarrow \|z^{n+1}\|_C \to 0, \ \tau \to 0, h \to 0 \Rightarrow$ имеет место абс. сх-ть с 1-м пор. по τ и 2-м по h

Если рассм. неч. зад. с нуль. н.у, то

$$\|y^{n+1}\|_c \le \|u_0\|_c + \sum_{k=0}^{n} \tau \|f^k\|_c$$

Это априорная оц.

Она одн. уст-ть по нач. усл. и прав. ч.

Зам. в чисто неяв. РС τ выбир. $\approx h$.

3°. Симметричная разностная схема (сх. Кранка – Никольсена).

Введём

$$y^m_{\bar{x}x,i} = \frac{y^m_{i+1} - 2y^m_i + y^m_{i-1}}{h^2}$$ — аппроксимация 2-ой пр. произв в узле (x_i, t_m)

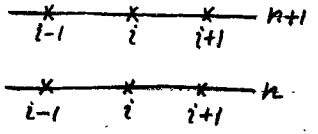
$\Rightarrow$ симм. РС запис-ся так:

$$\frac{y^{n+1}_i - y^n_i}{\tau} = 0.5\left(y^{n+1}_{\bar{x}x,i} + y^n_{\bar{x}x,i}\right) + f(x_i, \underbrace{t_n + 0.5\tau}_{\text{рассм. в полуцелое}}) \quad (4)$$

$$y^{n+1}_0 = \mu_1(t_{n+1}),\ y^{n+1}_N = \mu_2(t_{n+1}) \quad (5)$$

$$y^0_i = u_0(x_i),\ x_i \in \overline{\omega_h} \quad (6)$$

Рассм. двухсл. шаблон



шаблон типа «крест» (шеститоч. шаблон)

симм. РС – тоже неявная реш-е $\exists!$, алгм – метод прогонки

Рассм. подробно вопросы уст-ти и сх-ти симм. РС.

Нам бы хотелось получать оценки в более сильной метрике.

Но для симм. РС – это очень слож. зад. (предмет докт. диссертации).

Поэтому мы будем рассм. в более слабой (среднекв.) норме.

Подход – метод Фурье (метод разделения пер-х).

Задача на собств. знач. (Штурма – Лиувилля)

Рассм. диффф. одн. зад.

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dx^2} + \lambda u(x) = 0, & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0,\ u(1) = 0,\ u(x) \not\equiv 0 \end{cases} \quad (7)$$

Ищутся такие зн. λ и с.ф. $u(x)$, уд. (7)

С.з. $\lambda_k = (\pi k)^2$, $k = 1, 2, \ldots$ $\Rightarrow$ все с.з. возрастают: $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$

$\forall \lambda_k$ соотв. одна ф-ция $u_k(x) = \sqrt{2}\sin \pi k x$

Т.о., реш-ем зад. (7) явл. с.з. $\lambda_k = (\pi k)^2$ и с.ф. $u_k(x) = \sqrt{2}\sin \pi k x$.

Рассм. $f \in L_2$ (гильбертово пр-во):

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx < \infty$$ (инт-лы с квадратом)

Введ скал. произв.:

$\forall g, f \in L_2 \Rightarrow (f, g) = \int_0^1 f(x) g(x)\,dx$

$\Rightarrow$ норма $\|f\|_{L_2} = \sqrt{(f, f)} = \left(\int_0^1 f^2(x)\,dx\right)^{1/2}$ – среднекв. норма

Если мы ввели скал. пр-е, то $\exists \{u_k\}_1^\infty$ образуют ортогон. базис:

$$(u_k, u_\ell) = \delta_{k\ell}$$

$\Rightarrow \forall f \in L_2$ можно предст. в виде ряда Фурье

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(x).$$

$\Rightarrow$ справедливо рав-во Парсеваля

$$\|f\|^2_{L_2} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

Оно очень важно с т.з. получения устойчивости задачи.

Теперь переходим к разностн. зад. Шт.-Лиув.

(8)
$$\begin{cases} y_{\overline{x}x,i} + \lambda y_i = 0 \quad 0<i<N, \ y_i \not\equiv 0 \\ 0<x_i<1 \\ y_0 = y_N = 0 \end{cases}$$

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \lambda y_i = 0 \Rightarrow$$

(*)
$$y_{i+1} + y_{i-1} = (2 - \lambda h^2) y_i$$

Решение будем искать в виде

$$y(x_i) = y_i = \sin \alpha x_i, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow y_{i+1} + y_{i-1} = \sin\alpha(x_i + h) + \sin\alpha(x_i - h) =$$

$$= 2 \sin\alpha x_i \cos\alpha h$$

Подст. это в (*) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\sin\alpha x_i \cos\alpha h = (2 - \lambda h^2)\sin\alpha x_i \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ (сокр. на $\sin\alpha x_i \neq 0$) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\cos\alpha h = 2 - \lambda h^2 \Rightarrow \lambda h^2 = 2(1 - \cos\alpha h) = 2 \cdot 2\sin^2\frac{\alpha h}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\alpha h}{2}} \Rightarrow \text{все } \lambda > 0$$

$$y_N = y(1) = \sin\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \pi k$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2\frac{\pi k h}{2}, \ k = \overline{1, N-1}} \quad \text{— собственные значения.}$$

Соб. ф-ции $\boxed{u_k(x_i) = \sqrt{2}\sin\pi k x_i, \ x_i \in \omega_h}$

Причём $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{N-1}$

Т.о., мы получили с.з. и с.ф. зад. Ш.-Л.

Введём сеточное конечномер. пр-во H:
$\dim H = N-1$
Это пр-во сет. функций $y_0 = y_N = 0$.
Они будут суммироваться с квадратом.

Введём скал. пр-е сет. функций

$$\forall z, y \in H \quad (z, y) = \sum_{k=1}^{N-1} z_k y_k h$$

$$\Rightarrow \|y\|_{L_2(\omega_h)} = \left(\sum_{k=1}^{N-1} y_k^2 h\right)^{1/2}$$

$\Rightarrow (u_k(x_i), u_\ell(x_i)) = \delta_{k\ell}$, т.е.

совок-ть функций $\{u_k(x)\}_1^{N-1}$ — ОНБ пр-ва H

Разложим $\forall$ функцию по ОНБ:

$$\forall y \in H \quad y(x) = \sum_{k=1}^{N-1} c_k u_k(x_i), \quad x_i \in \overline{\omega_h}$$

Т.к. есть ОНБ, имеет место рав-во Парсеваля

$$\|y\|^2_{L_2(\omega_h)} = \sum_{k=1}^{N-1} c_k^2$$

/* пр-во сеточных ф-ций сумм-х с квадратом */

Именно из рав-ва Парсеваля мы получим оценку уст-ти.

Будем применять метод Фурье (МРП).

$\exists \{u_k(x_i) = \sqrt{2}\sin\pi k x_i$ — соб. функц. $(x_i \in \omega_h)$

Доля пор-ти имеем задачу $\Rightarrow$

(9) $\Rightarrow \dfrac{z_i^{n+1}-z_i^n}{\tau} = 0{,}5\left(z_{\bar{x}x,i}^{n+1} + z_{\bar{x}x,i}^{n}\right) + \psi_i^n$

(10) $z_0^{n+1} = z_N^{n+1} = 0$

(11) $z_i^0 = u_0(x_i)$

где $\psi_i^n = -\dfrac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau} + 0{,}5\left(u_{\bar{x}x,i}^{n+1} + u_{\bar{x}x,i}^{n}\right) + f_i^{n+\frac{1}{2}}$ — погр. аппроксимации на реш-ии

Задача Пок, что $\psi_i^n = O(\tau^2 + h^2)$

$\|z^n\|_{L_2(\omega_h)} = \|z^n\|$ (обозначим) — это среднекв. норма.

Ищем частн. реш-е зад. (9)–(11) в виде

(*) $z_i^n = \sum\limits_{k=1}^{N-1} c_k(t_n)\,\mu^{(k)}(x_i) \not\equiv 0$ ($\mu^{(k)}$ — базис из соб. ф-ций)

$\Rightarrow \psi_i^n = \sum\limits_{k=1}^{N-1} \psi^{(k)}(t_n)\,\mu^{(k)}(x_i)$

06.04.04 Лекц. 16

$\overset{(9)}{\Rightarrow} \sum\limits_{k=1}^{N-1}\left(\dfrac{c_k(t_{n+1})-c_k(t_n)}{\tau}\right)\mu^{(k)}(x_i) = 0{,}5\left(\sum\limits_{k=1}^{N-1} c_k(t_{n+1}) + c_k(t_n)\right)\mu_{\bar{x}x,i}^{(k)} + \sum\limits_{k=1}^{N-1}\psi^{(k)}(t_n)\,\mu^{(k)}(x_i)$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{N-1}\left(\dfrac{c_k(t_{n+1})-c_k(t_n)}{\tau} - \psi^{(k)}(t_n)\right)\mu^{(k)}(x_i) = 0{,}5\left(\sum\limits_{k=1}^{N-1}\left(c_k(t_{n+1})+c_k(t_n)\right)\mu_{\bar{x}x}^{(k)}(x_i)\right)$

$\Rightarrow$ {поделим} $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{N-1} \dfrac{\frac{c_k(t_{n+1})-c_k(t_n)}{\tau} - \psi^{(k)}(t_n)}{0{,}5\left(c_k(t_{n+1})+c_k(t_n)\right)} = \sum\limits_{k=1}^{N-1} \dfrac{\mu_{\bar{x}x}^{(k)}(x_i)}{\mu^{(k)}(x_i)} = -\lambda_k$

$\Rightarrow \mu_{\bar{x}x,i}^{(k)} = -\lambda_k \mu_i^{(k)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \mu_{\bar{x}x,i}^{(k)} + \lambda_k \mu_i^{(k)} = 0, & i = \overline{1, N-1} \\ \mu_0 = \mu_N = 0 \end{cases}$ — задача Штурма–Лиувилля

$\Rightarrow$ Ур-е для $c_k(t_n)$

$$\begin{cases} \dfrac{c_k(t_{n+1})-c_k(t_n)}{\tau} - \psi^{(k)}(t_n) = -\lambda_k \cdot 0{,}5\left(c_k(t_{n+1})+c_k(t_n)\right) \\ c_k(0) = 0 \quad \text{// на нулевом слое} \end{cases}$$

$\Rightarrow \dfrac{c_k(t_{n+1})-c_k(t_n)}{\tau} + 0{,}5\lambda_k\left(c_k(t_{n+1})+c_k(t_n)\right) = \psi^{(k)}(t_n)$

$\Rightarrow \underbrace{\left(1+0{,}5\tau\lambda_k\right)}_{\delta} c_k(t_{n+1}) - \left(1-0{,}5\lambda_k\tau\right)c_k(t_n) = \tau\psi^{(k)}(t_n)$

$\Rightarrow c_k(t_{n+1}) = \dfrac{1-0{,}5\tau\lambda_k}{1+0{,}5\tau\lambda_k} c_k(t_n) + \dfrac{\tau}{1+0{,}5\tau\lambda_k}\psi^{(k)}(t_n)$

($c_k(t_{n+1})$: погр-ть на (n+1)-ом слое; $c_k(t_n)$: погр-ть на n-ом слое; $\psi^{(k)}(t_n)$: погр. аппр-ции)

Введем $q_k = \dfrac{1-0{,}5\lambda_k\tau}{1+0{,}5\lambda_k\tau}$, $|q_k| \le 1$

$$\Rightarrow \boxed{c_k(t_{n+1}) = q_k c_k(t_n) + \frac{\tau}{1+0{,}5\tau\lambda_k}\psi^{(k)}(t_n)} \qquad (**)$$

Теперь можем начать получать оценку

$$\|z^{n+1}\|_{L_2(\omega_h)} \le \|z^n\|_{L_2(\omega_h)} + \tau\|\psi^n\|_{L_2(\omega_h)}$$

$(*) \Rightarrow z_i^{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{N-1} c_k(t_{n+1})\,\mu^{(k)}(x_i) \overset{(**)}{=} \underbrace{\sum\limits_{k=1}^{N-1} q_k c_k(t_n)\,\mu^{(k)}(x_i)}_{v_i^n \text{ (бодн.)}} + \underbrace{\sum\limits_{k=1}^{N-1}\dfrac{\tau}{1+0{,}5\tau\lambda_k}\psi^{(k)}(t_n)\mu^{(k)}(x_i)}_{w_i^n}$

$\Rightarrow \|z^{n+1}\|_{L_2(\omega_h)} \le \|v^n\|_{L_2} + \|w^n\|_{L_2}$

// будем пол-ть, что нав-во Парсеваля; если — т.е. нет базиса оно не вып. — то нельзя //

на n-ом слое

$\|v^n\|^2_{L_2(\omega_h)} = \sum\limits_{k=1}^{N-1} q_k^2 c_k^2(t_n) \le \sum\limits_{k=1}^{N-1} c_k^2(t_n) = \|z^n\|^2_{L_2(\omega_h)}$

$\|w^n\|^2_{L_2(\omega_h)} = \sum\limits_{k=1}^{N-1}\dfrac{\tau^2}{(1+0{,}5\tau\lambda_k)^2}\left(\psi^{(k)}(t_n)\right)^2 \le \sum\limits_{k=1}^{N-1}\tau^2\left(\psi^{(k)}(t_n)\right)^2 =$ (=)

$\Rightarrow \tau^2 \|\psi^n\|^2_{L_2(\omega_h)}$

(***) Т.о., $\boxed{\|z^{n+1}\|_{L_2(\omega_h)} \le \|z^n\|_{L_2} + \tau\|\psi^n\|_{L_2}}$

мы получ. эту оц. без огр-ий на шаги сетки $\Rightarrow$ сх-ть и устойчивость будет абсолютной.

Замеч. такие обр. можно исслед-ть т РС при $\forall \sigma$ {в L_2, а в C – не всегда}

$\Rightarrow$ {рассм. (***) как некк.} $\Rightarrow$

(12) $\Rightarrow \|z^{n+1}\|_{L_2(\omega_h)} \le \underbrace{\|z^0\|_{L_2}}_{0} + \sum_{j=0}^{n} \tau\|\psi^j\|_{L_2(\omega_h)}$

$\Rightarrow$ {т.к. $\|\psi^j\| \le M(\tau^2+h^2)$, где >0 – не завис. от τ и h

$\Rightarrow \|z^{n+1}\|_{L_2} \le M_1(\tau^2+h^2)$, где $M_1 = TM$ – не завис. от τ и h

$\Rightarrow$ устремив $\tau \to 0$ и $h \to 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \|y^{n+1} - u^{n+1}\| \to 0$ — сходимость в L_2 со вторым пор. по τ и по h

(втор. пор. точности как по врем., так и по простр. пер.)

Здесь сх-ть среднеквадратичная (слабее, чем поточечная)

Т.о., симм. РС – абс. сх-щаяся РС со вторым пор. точн. по τ и h.

Если рассм. РС: $y_0^{n+1} = y_N^{n+1} = 0 \Rightarrow$ получили оценку

(13) $\|y^{n+1}\|_{L_2(\omega_h)} \le \|u_0\|_{L_2(\omega_h)} + \tau\sum_{j=0}^{n}\|\psi^j\|_{L_2(\omega_h)}$

Эта оценка $\Rightarrow$ абс. устойч-ть симм. РС по нач. усл. и прав. ч.

4° Разностная схема с весами. Вывод погрешности аппроксимации на решении.

Задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad \begin{matrix} 0<x<1 \\ 0<t\le T \end{matrix} \tag{1}$$

$$u(0,t) = \mu_1(t),\ u(1,t) = \mu_2(t),\ 0 \le t \le T \tag{2}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ 0 \le x \le 1 \tag{3}$$

Поставим в соотв-е зад. (1)-(3) однопарам. сем-во РС вида

$$\frac{y_i^{n+1} - y_i^n}{\tau} = \sigma y^{n+1}_{\bar{x}x,i} + (1-\sigma) y^n_{\bar{x}x,i} + \psi_i^n,\ (x_i, t_n) \in \omega_{\tau h} \tag{4}$$

$$y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1});\ y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}),\ t_{n+1} \in \overline{\omega_\tau} \tag{5}$$

$$y_i^0 = u_0(x_i),\ x_i \in \overline{\omega_h} \tag{6}$$

$\forall \sigma \in R$, $0 \le \sigma \le 1$ ч

если $\sigma = 0$ – чисто явная разн. сх.

$\sigma = 0{,}5$ – то, что мы только что исследовали

обозн. $z_i^n = y_i^n - u_i^n$ – погреш-ть

$$\Rightarrow \frac{z_i^{n+1} - z_i^n}{\tau} = \sigma z^{n+1}_{\bar{x}x,i} + (1-\sigma) z^n_{\bar{x}x} + \psi_i^n, \tag{7}$$

где ψ_i^n – погр-ть аппр. на решении:

$$\psi_i^n = \sigma u^{n+1}_{\bar{x}x,i} + (1-\sigma) u^n_{\bar{x}x,i} - \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \psi_i^n \tag{8}$$

$\exists$ ф-ции u обладает дост. гладкостью ($\exists$ – е в-ых произв. по x и 3-их по t)

Оценим погр. аппроксимации.

Будем расм. по ф-ле Тейлора в узле $(x_i, t_{n+\frac{1}{2}})$

Обозн: $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u' = \frac{\partial u}{\partial x}$

$$u_{i+1} = u_i + h u_i' + \frac{h^2}{2} u_i'' + \frac{h^3}{6} u_i''' + \frac{h^4}{24} u_i^{IV} + \dots$$

$$u_{i-1} = u_i - h u_i' + \frac{h^2}{2} u_i'' - \frac{h^3}{6} u_i''' + \frac{h^4}{24} u_i^{IV} + \dots$$

$$u_i^{n+1} = u_i(t_{n+\frac{1}{2}}) + \frac{\tau}{2}\dot{u}(t_{n+\frac{1}{2}}) + \frac{\tau^2}{8}\ddot{u}_i(t_{n+\frac{1}{2}}) + \frac{\tau^3}{48}\dddot{u}_i(t_{n+\frac{1}{2}}) + \dots$$

$$u_i^n = u_i(t_{n+\frac{1}{2}}) - \frac{\tau}{2}\dot{u}_i(t_{n+\frac{1}{2}}) + \frac{\tau^2}{8}\ddot{u}_i(t_{n+\frac{1}{2}}) - \frac{\tau^3}{48}\dddot{u}(t_{n+\frac{1}{2}}) + \dots$$

$\Rightarrow u_{\bar{x}x,i} = u_i'' + \frac{h^2}{12}u_i^{IV} + O(h^4)$

$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \dot{u}(x_i, t_{n+\frac{1}{2}}) + O(\tau^2)$

$\Rightarrow$ { подст. всё в сл-му (8) }

$\psi_i^n = \sigma(u'' + \frac{\tau}{2}\dot{u}'' + \frac{h^2}{12}u^{IV}) + (1-\sigma)(u'' - \frac{\tau}{2}\dot{u}'' + \frac{h^2}{12}\cdot u^{IV}) - \dot{u} + \varphi_i^n + O(\tau^2) + O(h^4) =$

общ. с $u = u(x_i, t_{n+\frac{1}{2}})$

$= (u'' - \dot{u} + \varphi_i^n) + (\sigma - 0{,}5)\tau\dot{u}'' + \frac{h^2}{12}u^{IV} + O(\tau^2) + O(h^4)$

Восп-ся ур-ем $u'' - \dot{u} = -f$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ { дважды продифф. по x } $\Rightarrow$

$\Rightarrow u^{IV} - \dot{u}'' = -f'' \Rightarrow u^{IV} = \dot{u}'' - f''$

$= (u'' - \dot{u} + f(x_i, t_{n+\frac{1}{2}})) - f(x_i, t_{n+\frac{1}{2}}) + \varphi_i^n +$

$+ (\overset{\circ}{(\sigma - 0{,}5)}\tau + \frac{h^2}{12})\dot{u}'' + O(\tau^2) + O(h^4) - \frac{h^2}{12}f''(x_i, t_{n+\frac{1}{2}})$

Выберем φ_i^n: $\circ$ – слаг-е обратимся в 0

$\Rightarrow \varphi_i^n = f(x_i, t_{n+\frac{1}{2}}) + \frac{h^2}{12}f''(x_i, t_{n+\frac{1}{2}})$

1) выберем $\sigma = 0{,}5$; $\varphi_i^n = f(x_i, t_{n+\frac{1}{2}}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \psi = O(\tau^2 + h^2)$ – пор-ть аппрокс.

$\Rightarrow$ это симметричная РС

2) обнулим этот коэф-т:

$\Rightarrow (\sigma - 0{,}5)\tau - \frac{h^2}{12} = 0 \Rightarrow$ выберем

$\sigma_* = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}$, $\varphi_i^n = f(x_i, t_{n+\frac{1}{2}}) + \frac{h^2}{12}f''(x_i, t_{n+\frac{1}{2}})$

$\Rightarrow \psi_* = O(\tau^2 + h^4)$ – схема повышенного пор. точности

3) остальное

$\forall \sigma$; $\varphi_i^n = f(x_i, t_n) = f(x_i, t_{n+1}) = \dots$

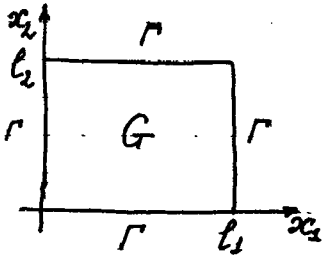
$\Rightarrow \psi = O(\tau + h^2)$

§2. Разностная схема для уравнения Пуассона (зад. Дирихле).

Пост. зад.:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f(x_1, x_2), \ (x_1, x_2) \in G & (1) \\ u(x_1, x_2)|_\Gamma = \mu(x_1, x_2) & (2) \end{cases}$$

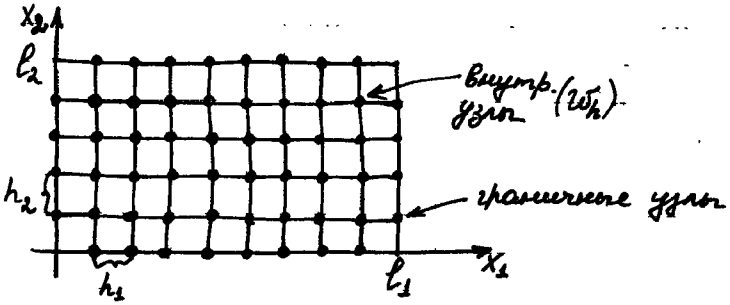
$G = \{(x_1, x_2) : 0 < x_1 < l_1, \ 0 < x_2 < l_2\}$



$\overline{G} = G \cup \Gamma$

Надо найти непр. в $\overline{G}$ ф-цию (u), уд. (1)-(2). Эта зад. имеет ед. реш. при $\forall f$ и μ.

Вв. сетку с пост. шагом.



$w_h = \{(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}) : x_1^{(i)} = i \cdot h_1, \ i = \overline{1, (N_1 - 1)}, \ x_2^{(j)} = j \cdot h_2, \ j = \overline{1, (N_2 - 1)},$

$\Gamma_h = \{x_{0,j}\}_1^{N_2-1} \cup \{x_{N_1,j}\}_1^{N_2-1} \cup \{x_{i,0}\}_1^{N_1-1} \cup \{x_{i,N_2}\}_1^{N_1-1} \}$ | $h_1 = \frac{l_1}{N_1}, \ h_2 = \frac{l_2}{N_2}$

$\Rightarrow \overline{w_h} = w_h \cup \Gamma_h$ – совок. всех узлов сетки